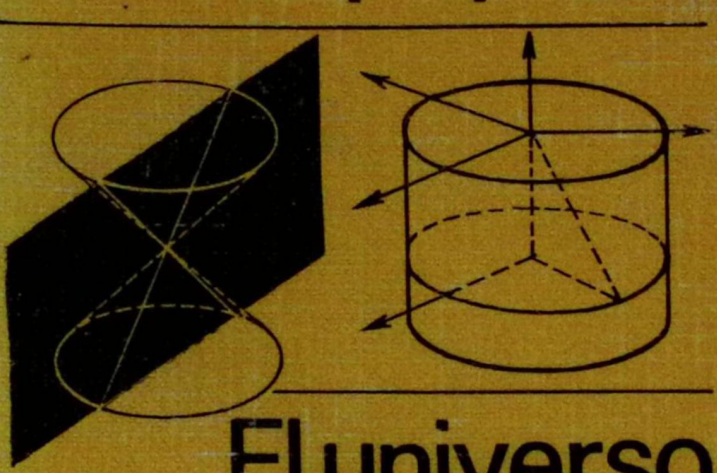
ciencia popular



El universo tetradimensional de Minkowski

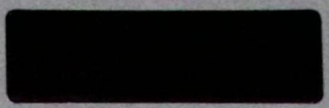
A. A. Sazánov

En forma amena y comprensible se desarrolla el concepto de espacio seudoeuclídeo, se estudian sus propiedades métricas, se muestra la posibilidad de explicar los dos postulados de Einstein y todos los efectos de la teoría de la relatividad mediante las líneas de universo.

Editorial · Mir · Moscú

027954 15.-

El universo tetradimensional de Minkowski



А. А. САЗАНОВ

ЧЕТЫРЁХМЕРНЫЙ МИР МИНКОВСКОГО

МОСКВА «НАУКА»

A. SAZÁNOV

El universo tetradimensional de Minkowski

EDITORIAL MIR MOSCÚ

Traducido del ruso por el ingeniero
Antonio Molina García

Impreso en la URSS

На испанском языке

ISBN 5-02-013734-0 (русск.)
ISBN 5-03-000783-0 (исп.)
© Издательство «Наука» 1988
© traducción al español, A. Molina García, 1990

Indice

Prólogo 7

CAPÍTULO 1. «EL CAMINO REAL EN LA GEOMETRÍA» 11

§ 1. «Que no pase quien no sepa geometría» 11
§ 2. Vectores geométricos y operaciones lineales con ellos 16
§ 3. Relaciones de dependencia lineal y de independencia lineal de los vectores. Dimensión y base de un espacio . . . 24
§ 4. Espacio lineal abstracto 40
§ 5. Propiedades lineales del espacio sensorialmente perceptible 53
§ 6. Propiedades métricas del espacio sensorialmente perceptible 60

CAPÍTULO 2. PLANO SEUDOEUCLÍDEO 77

§ 7. Historia de los números «que no existen en realidad» 78
§ 8. Espacios lineales de números complejos 99
§ 9. Espacio bidimensional seudoeuclídeo 101
§ 10. Interpretación geométrica de un conjunto de números complejos 105

§ 11. Medida de longitudes en el plano seudoeuclídeo 121
§ 12. Relación de perpendicularidad de las rectas en el plano seudoeuclídeo . . 131
§ 13. Medida de ángulos en el plano seudoeuclídeo 138
§ 14. Transformación de las coordenadas en el plano seudoeuclídeo 160

CAPÍTULO 3. CONTENIDO GEOMÉTRICO DE LA TEORÍA ESPECIAL DE LA RELATIVIDAD 169

§ 15. Transformación de Lorentz 169
§ 16. Qué nos dice la comparación de la transformación de Lorentz con la transformación de coordenadas en un plano seudoeuclídeo 179
§ 17. Líneas de universo 205
§ 18. Fenómeno de la propagación de la luz 215
§ 19. Vector masa 237
§ 20. Fuerza de Minkowski 273
§ 21. Simultaneidad relativa y absoluta . 295

CAPÍTULO 4. ESPACIO TRIDIMENSIONAL SEUDOEUCLÍDEO 317

§ 22. Estructura del espacio seudoeuclídeo tridimensional 317
§ 23. Explicación del efecto Compton . . 329

CAPÍTULO 5. UNIVERSO TETRADIMENSIONAL DE MINKOWSKI 337

§ 24. Hiperplano 337
§ 25. Hipercono isótropo 348
§ 26. Espacio sensorialmente perceptible 355

Bibliografía 388

Prólogo

Dedico este libro a la memoria de mis padres: Anatoli Nikoláyevich Sazánov y Zinaída Yákovlevna Sazánova. El interés por los problemas filosóficos de las ciencias naturales fue para nosotros la base principal de relación, en tanto que nuestras largas discusiones estimularon la creación de la idea lo más clara posible de cómo puede estar construido el universo que describe la teoría de la relatividad.

Hace 80 años Hermann Minkowski propuso una interpretación geométrica de la teoría especial de la relatividad. En nuestros días el conocimiento de la teoría de la relatividad se ha convertido en elemento necesario de la instrucción general, pero la enseñanza y la comprensión de esta teoría es aún difícil, a causa de que su descripción matemática contradice las representaciones del espacio y del tiempo que se basan directamente en las percepciones sensitivas y se consolidan con el estudio de la física clásica. La geometría del universo de Minkowski sigue siendo para los no especialistas una abstracción de difícil acceso.

Sin embargo, es muy poco lo que hay que añadir a los conocimientos matemáticos, que se dan en la escuela de segunda enseñanza y en el primer curso de los centros de enseñanza superior, para desarrollar la idea del espacio seudoeuclídeo.

Ante todo son necesarios los conceptos de espacio lineal abstracto y de su variedad, el espacio euclídeo, y saber distinguir las propiedades lineales y métricas del espacio. Esos son los conceptos de partida para construir la teoría geométrica. Sin suficiente libertad tanto en su dominio, como en el del aparato algebraico relacionado con ellos, es imposible vencer el apego a la acostumbrada evidencia de las imágenes y penetrar en el mundo de las formas ocultas a la percepción visual directa. Por eso el primer capítulo de este libro se consagra a exponer los conocimientos de álgebra lineal que se necesitan.

Otra barrera en el camino de la comprensión del universo de Minkowski es la debida a los números complejos. Tiene importancia no sólo dar el concepto de número complejo, sino también disipar la actitud hacia él como invención artificial de los matemáticos que, aún teniendo cualidades lógicas, carece de base en el mundo real. En el capítulo 2 se explica la ligazón de los números complejos con el plano seudoeuclídeo y se estudian detenidamente las propiedades de éste.

En el tercer capítulo se expone la interpretación geométrica de la teoría especial de la relatividad en el marco del espacio bidimensional seudoeuclídeo. Minkowski hace hincapié en que tras la relatividad de los intervalos de tiempo, de las distancias y de la masa se oculta la invariancia de determinadas características del mundo material en el espacio seudoeuclídeo. Decía él: «el término de «postulado de la relatividad» me parece demasiado pobre ... preferiría dar a esta aseveración el nombre de *postulado del universo absoluto* (o abreviadamente, postulado universal)» [1]. Del modelo de universo propuesto por Minkowski se pueden obtener como consecuencias no sólo todos los efectos relativistas, sino también los dos postulados de Einstein. De esta forma se profundizan las bases de la teoría que se postulan: en vez de las afirmaciones que, siendo verdaderas, parecen paradójicas sobre el fondo de la imagen clásica del mundo, se propone una nueva imagen del universo. Esta es lógicamente acabada y las deducciones que de ella se hacen concuerdan perfectamente con los hechos establecidos con toda seguridad experimentalmente.

En los capítulos cuarto y quinto se estudian los espacios tridimensionales y cuatridimensionales con propiedades métricas seudoeuclídeas. Se demuestra que el mundo, formado por líneas de universo en el espacio cuatridimensional de Minkowski, debe percibirse en forma de un mundo de

puntos materiales sumergidos en el espacio tridimensional.

Espero que los lectores hispanohablantes acojan con interés los puntos de vista que aquí se exponen.

A. Sazánov

CAPÍTULO 1

"El camino real en la geometría"

«... el desarrollo histórico de todas las ciencias sólo a través de multitud de vías entrecruzadas e indirectas conduce a su punto de partida real. A diferencia de otros arquitectos, la ciencia ... levanta determinados pisos habitables del edificio antes de haber echado los cimientos.»

C. Marx

§ 1. "Que no pase quien no sepa geometría"

El filósofo griego Platón escribió sobre la puerta de entrada a su escuela, que llamó Academia: «Que no pase quien no sepa geometría». Diecinueve siglos después Nicolás Copérnico tomó estas palabras como epígrafe de su libro «*De revolutionibus orbium coelestium*». La imagen del universo propuesta por Copérnico contradecía de un modo manifiesto la evidencia externa, las opiniones de autoridades y los dogmas religiosos que imperaban. ¿Qué pudo inducir en aquel tiempo a los hombres a inclinarse por la nueva idea del mundo? Una sola razón, que las deducciones matemáticas del sistema de Copérnico concuerdan de la mejor manera posible con los movimientos observables de los cuerpos celestes. Pero, para comprender esa razón y valorar su importancia, hay que saber geometría y seguir atentamente los argumentos del autor.

Los descubrimientos de Copérnico, Galileo, Kepler y Newton sentaron los cimientos de la concepción cientificonatural del mundo, que permitió penetrar profundamente en la esencia de las cosas. No obstante, en una etapa determinada del desarrollo de la teoría física y del experimento exacto, empezaron a notarse discrepancias entre éstos que evidenciaban la existencia de defectos de principio en las premisas teóricas de partida. Inicialmente la comprensión de estos defectos y la introducción de correcciones en la teoría se puso de manifiesto en los postulados que generalizaron los nuevos hechos experimentales. De los postulados de Einstein se desarrolló la teoría de la relatividad y de los de Bohr, la teoría cuántica, las dos direcciones principales de la revolución en la física del siglo XX. Esta revolución científica, de un modo semejante a la de Copérnico, introdujo cambios radicales en nuestras ideas sobre la estructura del universo. El objeto de este libro es estudiar aquellos aspectos del conjunto del mundo que pueden ser deducidos de la teoría espacial de la relatividad.

La teoría de la relatividad surgió como solución a las grandes dificultades que ofrecía la comprensión del fenómeno de la propagación de la luz. Las representaciones teóricas existentes no podían armonizar entre sí ciertos hechos experimentales bien establecidos (ante todo el fenómeno de la aberración de la luz y la ausencia del «viento etéreo», demostrada por el experimento de Michelson—Morley) [2, 3]. Albert Einstein postuló como verdades de partida aseveraciones que contradecían los principios de la física clásica, pero no los datos experimentales, y empezó a estudiar las correcciones a los criterios clásicos que se infieren lógicamente de sus postulados. Según su primera enunciación, los postulados de Einstein dicen:

«1. Las leyes por las cuales varían los estados de los sistemas no dependen de a cuál de dos sistemas de coordenadas, que se muevan uniforme y rectilíneamente uno respecto del otro, se refieran dichas variaciones de los estados.

2. En un sistema de coordenadas en «reposo», todo rayo de luz se mueve con una velocidad determinada V, independientemente de si el cuerpo que lo emite está en reposo o en movimiento» [4].

De estos postulados Einstein saca la conclusión de que la duración del intervalo de tiempo entre dos sucesos y la magnitud de la distancia entre dos puntos del espacio deben ser diferentes en distintos sistemas inerciales de coordenadas que se muevan el uno respecto del otro. La deducción paradójica de la inconstancia del espacio y del tiempo (y, tras ellos, de la masa), que en la física clásica se consideraban como características absolutas fundamentales del universo, era el rasgo más destacado de la nueva teoría, lo cual se reflejó en el

nombre que recibió, a saber: teoría de la relatividad. Hasta finales del siglo XIX en la ciencia se conservó la convicción de que el espacio universal era en esencia tal y como lo percibían nuestros órganos sensoriales. Los rasgos más característicos del espacio percibido por los sentidos consisten en que tiene tres dimensiones y se describe por la teoría geométrica de Euclides. De acuerdo con la terminología moderna, se llama así: espacio euclídeo tridimensional propio. Pero si el espacio universal es realmente así, las distancias entre sus puntos (dimensiones y formas de los cuerpos) deben ser invariables, con independencia del sistema de referencia que se elija. Hermann Minkowski comprendió que el espacio que percibían los sentidos era solamente una visión externa, una forma de manifestarse algunas de las propiedades geométricas del espacio universal real. «Los criterios que sobre el espacio y el tiempo quiero desarrollar ante ustedes surgieron sobre una base físico-experimental. En eso consiste su fuerza. Su tendencia es radical. Desde ahora el espacio de por sí y el tiempo de por sí deben convertirse en ficciones y sólo cierto tipo de conjunciones de ambos deben conservar aún su independencia»—, así comenzó Minkowski su informe en la LXXX Conferencia de naturalistas y médicos alemanes celebrada en Colonia el 21 de septiembre de 1908 [1].

Así como en los tiempos de Copérnico

fue difícil admitir, a pesar de la evidencia externa, el sistema heliocéntrico del mundo, en nuestro tiempo no es fácil comprender y figurarse el mundo en un espacio diferente del que perciben nuestros sentidos. Para vencer esta dificultad también hacen falta conocimientos del campo de la geometría, pero aún más profundos. Hasta ahora conserva su vigor la idea profética de Platón acerca de que sin la geometría es imposible comprender la estructura del universo: «¡Que no pase quien no sepa geometría!». Pero sería erróneo pensar que la comprensión de la geometría del universo de Minkowski sólo es posible a los especialistas con estudios fisicomatemáticos superiores. Existe una leyenda según la cual Tolomeo I, rey de Egipto, pidió a Euclides que le explicara la geometría de un modo más corto y más rápido, a cuya petición respondió Euclides: «En geometría no existen caminos reales». En nuestros días la expansión y diferenciación de los conocimientos científicos va acompañada de generalizaciones, del descubrimiento de algunas ideas muy profundas y de las relaciones entre ellas, que permiten hacer una exposición exacta y lacónica de la teoría. El desarrollo de la geometría marcha en este sentido por el camino de su algebraización. El destacado matemático francés contemporáneo Gustave Choquet escribe: «... hoy tenemos un «camino real» fácil en la geometría, que pasa por los conceptos de «espacio vectorial» y «producto

escalar»... Euclides fundamentó su geometría en el plano sobre los criterios de igualdad de los triángulos. Ventitrés siglos después los matemáticos definieron el plano como un espacio afín de dimensión 2 con un producto escalar dado en él» [5]. La profundidad de las construcciones axiomáticas, que se utilizan en el álgebra lineal (que en opinión de Jean Dedonnée, otro eminente matemático francés, es la geometría elemental), permite no sólo simplificar la exposición de las verdades geométricas conocidas, sino que además abre nuevas posibilidades a las representaciones geométricas. Si podemos expresar con pocas ideas y relaciones matemáticas todas las propiedades esenciales del espacio, que perciben los sentidos, comprenderemos cómo está construido o, en términos generales, cuáles son sus principales «componentes iniciales». Entonces quedará claro cómo estos «componentes» se pueden unir en distintas combinaciones para formar otros tipos de espacio.

§ 2. Vectores geométricos y operaciones lineales con ellos

Para definir matemáticamente un espacio conviene utilizar vectores. Este objeto es bastante simple y evidente en el espacio perceptible por los sentidos (en el cual se denomina vector geométrico) y, al mismo tiempo, sirve para hacer generalizaciones de largo alcance. Se llama *vector geométrico* un segmento dirigido, es decir, un segmento de recta en el que se indica cuál de sus puntos límites es el origen y cuál el extremo [6].

La palabra *vector* proviene del latín *vectoris*, lo que significa que conduce. El vector geométrico indica el paso rectilíneo de un punto del espacio a otro. De esta representación se infiere naturalmente la definición de suma de vectores (fig. 1). Si

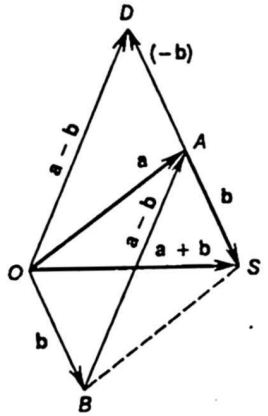


Fig. 1

se efectúa el paso del punto O al punto A, expresado por el vector $\mathbf{a} = \overline{OA}$, y a él se añade el paso del punto A al punto S, expresado por el vector $\mathbf{b} = \overline{AS}$, el resultado de los dos pasos será igual que si se hubiera realizado el paso rectilíneo del pun-

to O al punto S, expresado por el vector $\mathbf{s} = \overrightarrow{OS}$. Por eso el vector s se llama vector *suma* de los vectores a y b, y la operación de la suma de vectores se escribe en forma de expresión algebraica como sigue:

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AS} = \overrightarrow{OS}, \qquad (1.1)$$

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{s}.$$

Este procedimiento de construir la suma de vectores recibe el nombre de *regla del triángulo*.

Dos vectores se consideran *iguales* si por medio de una traslación paralela se pueden hacer coincidir respectivamente sus orígenes y sus extremos. Con esta definición de la igualdad de vectores resulta indiferente cuál es el punto de aplicación (o punto origen) del vector y surge el concepto de vector *libre*. El vector libre no tiene punto de aplicación determinado y podemos figurárnoslo aplicado a cualquier punto que queramos del espacio. Haciendo coincidir en la fig. 1 el origen del vector libre b con el origen del vector a, podemos construir el paralelógramo $OASB$, para el cual el vector suma $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \overrightarrow{OS}$ es la diagonal que parte del origen común de los vectores que se suman. Este procedimiento de construcción de la suma de vectores se llama *regla del paralelógramo*.

Ambas reglas (del triángulo y del paralelógramo) expresan una propiedad importante del vector suma, la de que se encuentra en el mismo plano que los vectores sumandos. Aplicando un término latino, se dice que los vectores sumandos y el vector suma son *coplanares*. Para los vectores libres el concepto de coplanaridad es más extenso: los vectores coplanares de este tipo pueden no estar en un mismo plano, mas, existe un plano paralelo a todos ellos al cual pueden ser llevados por medio de una traslación paralela.

Un caso particular del paso de un punto del espacio a otro es el de la ausencia de traslación. En este caso el extremo del vector geométrico coincide con el origen de éste. A este vector se le da el nombre de vector *nulo* y se designa por o. La relación

$$\mathbf{a} + \mathbf{o} = \mathbf{a}, \qquad (1.2)$$

que sirve de difinición algebraica del vector nulo, es evidente. El vector nulo no tiene dirección determinada en el espacio, lo que permite atribuirle una dirección cualquiera, es decir, considerarlo paralelo a cualquier otro vector.

Merecen especial mención los vectores cuyos puntos límites, por medio de una traslación paralela, se pueden hacer coincidir no origen con origen y extremo con extremo, sino al contrario, el origen del uno con el extremo del otro. Por ejemplo, en la fig. 1, el vector $\overrightarrow{BO}$ es igual al $\overrightarrow{SA}$, pero no lo es al vector $\overrightarrow{AS} = \mathbf{b}$. El vector (paso)

$\overline{SA}$ es *opuesto* al vector (paso) $\overline{AS}$, y su suma es un vector nulo:

$$\overline{AS} + \overline{BO} = \overline{AS} + \overline{SA} = \overline{AA} = \mathbf{o}.$$

El vector opuesto a **b** se designa con el símbolo (—**b**). La relación

$$\mathbf{b} + (-\mathbf{b}) = \mathbf{o} \qquad (1.3)$$

sirve de definición algebraica del vector opuesto. Es evidente que para cada vector geométrico puede hallarse un vector opuesto que satisfaga una relación de la forma (1.3). El vector nulo coincide con su opuesto.

Se llama *resta* de los vectores **a** y **b** a la suma del vector **a** y el vector (—**b**), opuesto al **b**:

$$\mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{a} + (-\mathbf{b}). \qquad (1.4)$$

El vector diferencia $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ es la segunda diagonal del paralelógramo construido sobre los vectores **a** y **b** (véase la fig. 1).

Partiendo de la definición de suma de vectores geométricos es fácil demostrar que ésta tiene propiedades conmutativas y asociativas. De esta forma ya hemos conocido cuatro propiedades de la suma de vectores:

1ª. $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$, propiedad conmutativa;

2ª. $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c})$, propiedad asociativa;

3ª. $\mathbf{a} + \mathbf{o} = \mathbf{a}$, definición del vector nulo;

4ª. $\mathbf{a} + (-\mathbf{a}) = \mathbf{o}$, definición del vector opuesto.

La suma de vectores es una de las operaciones lineales con vectores. La segunda operación lineal es la multiplicación de un vector por un número.

Se llama *producto* de un vector geométrico **a** por un número *real* λ

$$\mathbf{b} = \lambda\mathbf{a} = \mathbf{a}\lambda, \qquad (1.5)$$

a un vector *paralelo* al vector **a**, dirigido en el mismo sentido que éste si $\lambda > 0$, o en sentido opuesto si $\lambda < 0$; el valor absoluto del número λ indica las veces que el segmento **a** entra en el segmento **b** (fig. 2).

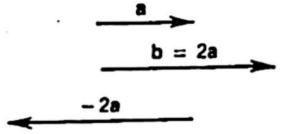


Fig. 2

El producto de un vector **a** por el número cero es un vector nulo:

$$0 \cdot \mathbf{a} = \mathbf{o}.$$

Dos vectores paralelos cualesquiera se pueden poner, por medio de traslaciones paralelas, sobre una misma recta. En este caso serán *colineares*. Como los vectores

libres no tienen punto de aplicación determinado, los conceptos de colinearidad y paralelismo son equivalentes para ellos. Si dos vectores son colineares, por lo menos uno de ellos puede representarse en forma de producto del otro por un número real. Por lo tanto, una relación del tipo (1.5) es la expresión algebraica de la colinearidad de los vectores.

Si en un conjunto de vectores paralelos entre sí, dirigidos en un mismo sentido, se toma un vector *no nulo* cualquiera $\mathbf{a}^0$ como unidad de medida, todo vector a de dicho conjunto podrá representarse en forma de producto del vector unidad (unitario) $\mathbf{a}^0$ por un número real no negativo, que designaremos por el símbolo $|\,a\,|$:

$$\mathbf{a} = |\,a\,| \cdot \mathbf{a}^0. \qquad (1.6)$$

El número $|\,a\,| \geqslant 0$ tiene el significado de longitud del vector a respecto del vector $\mathbf{a}^0$. El número $|\,a\,|$ se llama también *módulo* del vector a, y el vector unidad $\mathbf{a}^0$, *versor*. La representación (1.6) del vector en forma de producto de su versor por el módulo se emplea mucho en los razonamientos algebraicos y geométricos. El versor de un vector a se halla por la fórmula

$$\mathbf{a}^0 = \frac{1}{|\,a\,|} \cdot \mathbf{a}. \qquad (1.7)$$

El vector nulo o carece de dirección determinada y la fórmula (1.7) no puede aplicársele, ya que $|\,o\,| = 0$.

Un vector libre se determina totalmente por su dirección (versor) y su módulo. Para que dos vectores libres a y b sean iguales entre sí es necesario y suficiente que tengan la misma dirección y sentido ($\mathbf{a}^0 = \mathbf{b}^0$) y que sus módulos sean iguales ($|\,a\,| = |\,b\,|$).

Para la operación de multiplicar un vector por un número real es evidente que son correctas las siguientes relaciones:

5^a. $1 \cdot \mathbf{a} = \mathbf{a}$;

6^a. $\lambda(\mu a) = (\lambda\mu)\,a$, propiedad asociativa de la multiplicación por un número, siendo λ y μ números reales cualesquiera.

Advertimos que la resta de vectores no se considera operación independiente, ya que se puede reducir a la multiplicación de un vector por un número y a la adición de vectores. Por lo tanto, sólo hay dos operaciones lineales con vectores. Estas dos operaciones están ligadas entre sí por las leyes distributivas;

7^a. $(\lambda + \mu)\mathbf{a} = \lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{a}$, propiedad distributiva de la multiplicación por una suma de números;

8^a. $\lambda(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \lambda\mathbf{a} + \lambda\mathbf{b}$, propiedad distribuitiva de la multiplicación por una suma de vectores.

Las relaciones $1^a - 8^a$ representan la enumeración mínima de las propiedades de las operaciones lineales con vectores. Este conjunto de propiedades se toma como base de la amplia generalización algebraica

que es el concepto de espacio lineal (o vectorial). De las propiedades $1^a - 8^a$ se puede obtener una serie de corolarios muy utilizados en las transformaciones de expresiones algebraicas. En la aplicación de objetos tan concretos como los vectores geométricos, estos corolarios son bastante evidentes, por lo que podemos limitarnos a indicarlos:

$$0 \cdot \mathbf{a} = \mathbf{o}, \qquad (1.8)$$

el producto de cualquier vector por el número cero es un vector nulo;

$$(-1)\,\mathbf{a} = (-\mathbf{a}), \qquad (1.9)$$

el producto de cualquier vector a por el número -1 es un vector opuesto al a;

$$\lambda \cdot \mathbf{o} = \mathbf{o}, \qquad (1.10)$$

el producto de un vector nulo por un número λ cualquiera es un vector nulo.

§3. Relaciones de dependencia lineal y de independencia lineal de vectores. Dimensión y base de un espacio

Por medio de las operaciones lineales se forman los conceptos de dependencia lineal y de independencia de los vectores, los cuales tienen profundo sentido algebraico y geométrico. Consideremos una combinación arbitraria de operaciones lineales realizadas con un vector, por ejemplo,

$$\{(5\mathbf{a} + \alpha\mathbf{a})\,\beta - \gamma\mathbf{a}\}\,\delta + \varepsilon\,(2\mathbf{a}),$$

donde las letras griegas representan números reales. Esta expresión se puede simplificar aprovechando las propiedades de las operaciones lineales. Así, de acuerdo con la propiedad 7^a, tenemos que

$$5\mathbf{a} + \alpha\mathbf{a} = (5 + \alpha)\,\mathbf{a},$$

y basándonos en la propiedad 6^a, obtenemos

$$\{(5+\alpha)\,\mathbf{a}\}\,\beta = \{\beta\,(5+\alpha)\}\,\mathbf{a}.$$

Luego, sirviéndonos de las propiedades 8^a, 6^a, 2^a, 1^a y 7^a, completamos la transformación:

$$\{(\beta\,(5+\alpha))\,\mathbf{a} - \gamma\mathbf{a}\}\,\delta + \varepsilon\,(2\mathbf{a}) \overset{8^a,\ 6^a}{=\!=}$$

$$\overset{8^a,\ 6^a}{=\!=} \{(\delta\beta\,(5+\alpha))\,\mathbf{a} - (\delta\gamma)\,\mathbf{a}\} + (2\varepsilon)\,\mathbf{a} \overset{2^a,\ 1^a}{=\!=}$$

$$\overset{2^a,\ 1^a}{=\!=} \{\delta\beta\,(5+\alpha)\}\,\mathbf{a} + \{(2\varepsilon)\,\mathbf{a} - (\delta\gamma)\,\mathbf{a}\} \overset{7^a}{=\!=}$$

$$\overset{7^a}{=\!=} \{\delta\beta\,(5+\alpha) + (2\varepsilon - \delta\gamma)\}\,\mathbf{a} = \lambda\mathbf{a}.$$

La última expresión entre llaves consta solamente de números y se reduce a un número real λ. Es fácil comprender por qué *toda* combinación de operaciones lineales con un vector a se reduce inevitablemente a una expresión de la forma $\lambda\mathbf{a}$. En efecto, los productos del vector a por números reales cualesquiera serán vectores colineares del a, y la suma de estos vectores también será colinear del a. La expresión $\lambda\mathbf{a}$ se llama *combinación lineal* del vector a, ya que es

capaz de representar cualquier combinación lineal de operaciones con el vector **a**.

Si convenimos en tomar un vector *no nulo* $\mathbf{a} = \overline{OA}$ y todas sus combinaciones lineales $\lambda\mathbf{a}$ desde un mismo punto O, al cambiar el factor numérico λ desde $-\infty$, hasta $+\infty$, el extremo del vector $\lambda\mathbf{a} = \overline{OM}$ recorrerá todos los puntos de una recta infinita que, pasando por el punto O, será paralela al vector **a** (fig. 3). De esta forma, la fórmula algebraica $\overline{OM} = \lambda\mathbf{a}$ se puede considerar como la ecuación de la recta OM.

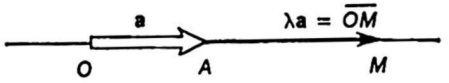


Fig. 3

Desde un punto de vista más amplio, cuando todos los vectores que se examinan se consideran libres, la expresión $\lambda\mathbf{a}$ ($\mathbf{a} \neq \mathbf{o}$) sirve de representante de un conjunto infinito de vectores aplicados a puntos cualesquiera del espacio. De dos vectores cualesquiera de este conjunto puede decirse que son linealmente dependientes, ya que por lo menos uno de ellos es una combinación lineal del otro. La salvedad «por lo menos» se hace por si se da el caso de que uno de los vectores tomados es nulo. Efectivamente, el vector nulo **o** es combinación lineal de cualquier vector (véase (1.8)):

$$0 \cdot \mathbf{a} = \mathbf{o},$$

pero si el vector **a** no es nulo ($\mathbf{a} \neq \mathbf{o}$), el mismo no puede ser combinación lineal $\lambda\mathbf{o}$ de un vector nulo para ningún valor de λ (véase 1.10)).

Consideremos ahora los vectores *no paralelos* $\mathbf{e}_1$ y $\mathbf{e}_2$. En la fig. 4 sus orígenes coinciden en el punto O. La dependencia lineal $\mathbf{e}_2 = \lambda\mathbf{e}_1$ o $\mathbf{e}_1 = \mu\mathbf{e}_2$ entre estos vectores es imposible cualesquiera que sean los valores de los coeficientes numéricos λ y μ. En efecto, la condición de no paralelismo significa que los vectores $\mathbf{e}_1$ y $\mathbf{e}_2$ no son nulos (ya que un vector nulo es paralelo a cualquier vector). Por lo tanto,

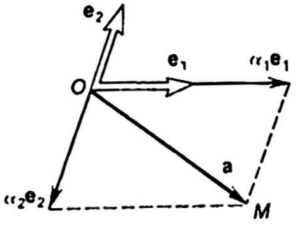


Fig. 4

si $\lambda = 0$ tenemos $\lambda\mathbf{e}_1 = 0 \cdot \mathbf{e}_1 = \mathbf{o} \neq \mathbf{e}_2$,

si $\mu = 0$ tenemos $\mu\mathbf{e}_2 = 0 \cdot \mathbf{e}_2 = \mathbf{o} \neq \mathbf{e}_1$.

Para todos los demás valores de λ y μ el vector $\lambda\mathbf{e}_1 \neq \mathbf{o}$ será paralelo al $\mathbf{e}_1$ y no puede ser igual al $\mathbf{e}_2$, y el vector $\mu\mathbf{e}_2 \neq \mathbf{o}$ será paralelo al $\mathbf{e}_2$ y no puede ser igual al $\mathbf{e}_1$. Como no existe posibilidad alguna de expresar uno por medio del otro, valiéndose de

operaciones lineales, los vectores $\mathbf{e}_1$ y $\mathbf{e}_2$, representados en la fig. 4, se dice que estos dos vectores son linealmente independientes o que forman un sistema de vectores *linealmente independiente*.

Una combinación arbitraria de operaciones lineales con *dos* vectores, $\mathbf{e}_1$ y $\mathbf{e}_2$, puede reducirse a la expresión

$$\alpha_1\mathbf{e}_1 + \alpha_2\mathbf{e}_2,$$

en la cual α_1 y α_2 son ciertos números reales. Esto es fácil de demostrar en cada caso mediante transformaciones formales, utilizando las propiedades $1^a - 8^a$ de las operaciones lineales y sus corolarios. La expresión $\alpha_1\mathbf{e}_1 + \alpha_2\mathbf{e}_2$ se llama *combinación lineal* de los vectores $\mathbf{e}_1$ y $\mathbf{e}_2$. Cualesquiera que sean los valores de los coeficientes α_1 y α_2, esta combinación representa un vector **a** *coplanar* de los vectores $\mathbf{e}_1$ y $\mathbf{e}_2$. En efecto, el vector $\alpha_1\mathbf{e}_1$ es colinear del vector $\mathbf{e}_1$, y el vector $\alpha_2\mathbf{e}_2$, colinear del $\mathbf{e}_2$. Por la propiedad de la suma de vectores, el vector

$$\alpha_1\mathbf{e}_1 + \alpha_2\mathbf{e}_2 = \mathbf{a} \qquad (1.11)$$

es coplanar de los vectores $\alpha_1\mathbf{e}_1$ y $\alpha_2\mathbf{e}_2$ y, por consiguiente, de los vectores $\mathbf{e}_1$ y $\mathbf{e}_2$.

Si convenimos en tomar todas las combinaciones lineales de la forma (1.11) desde un mismo punto O (véase fig. 4), al cambiar los valores de los coeficientes α_1 y α_2, independientemente uno de otro, desde $-\infty$ hasta $+\infty$, el extremo del vector $\mathbf{a} = \overline{OM}$ recorrerá todos los puntos de un plano que pasando por el punto O es paralelo a los vectores linealmente independientes $\mathbf{e}_1$ y $\mathbf{e}_2$ (vectores *directores* del plano). De esta forma, la relación (1.11) se puede considerar como la ecuación del plano O, $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$.

Desde un punto de vista más amplio, cuando todos los vectores que se examinan se consideran libres, la combinación lineal (1.11) sirve de representante de un conjunto infinito de vectores aplicados a puntos cualesquiera del espacio y paralelos al plano O, $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$. Un par arbitrario de vectores tomados de este conjunto puede resultar ser tanto linealmente dependiente (vectores colineares) como linealmente independiente (vectores no colineares). Pero de *tres* vectores cualesquiera del conjunto de combinaciones lineales (1.1), *uno por lo menos* puede ser expresado mediante los otros dos, valiéndose de operaciones lineales. De este sistema de tres vectores se dice que es linealmente dependiente. Vamos a demostrar que tres vectores coplanares cualesquiera **a**, **b** y **c** son linealmente dependientes.

Aprovechando el carácter coplanar de los vectores, los situamos en un mismo plano. Primero vamos a suponer que entre los vectores **a**, **b**, **c** no hay nulos ni paralelos entre sí. En este caso, trazando rectas paralelas a estos vectores se puede construir un triángulo ABC de dimensión arbitraria (fig. 5, *a*). Escribamos las condiciones de colinearidad de los lados del triángulo con los

respectivos vectores:

$$\overline{AB} = \lambda_1 \mathbf{a},\ \overline{BC} = \lambda_2 \mathbf{b},\ \overline{CA} = \lambda_3 \mathbf{c}.$$

Todos los coeficientes λ_1, λ_2, λ_3 son distintos de cero, puesto que el triángulo no tiene

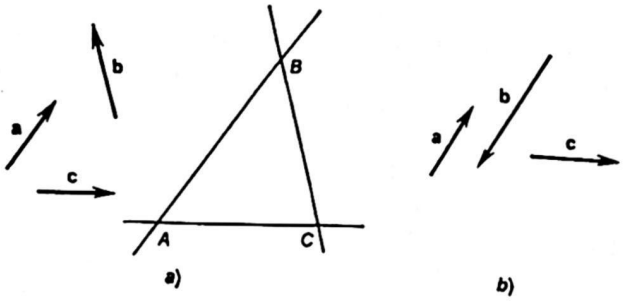


Fig. 5

lados de longitud nula. Para los lados del triángulo es correcta la relación

$$\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA} = \overline{AA} = \mathbf{o}$$

o bien

$$\lambda_1 \mathbf{a} + \lambda_2 \mathbf{b} + \lambda_3 \mathbf{a} = \mathbf{o}. \qquad (1.12)$$

De la ecuación (1.12) se puede obtener la expresión de cada vector mediante los otros dos, valiéndose de operaciones lineales. Por ejemplo,

$$\mathbf{a} = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\mathbf{b} - \frac{\lambda_3}{\lambda_1}\mathbf{c}$$

(la división por λ_1 es posible, puesto que $\lambda_1 \neq 0$). Pero eso significa que entre los vectores **a**, **b**, **c** existe una dependencia lineal. Ahora examinemos el caso en que los tres vectores no son nulos pero entre ellos hay por lo menos dos paralelos, por ejemplo, **a** y **b** (fig. 5, *b*). La colinearidad de los vectores **a** y **b** se expresa con una relación del tipo (1.5):

$$\mathbf{b} = \lambda \mathbf{a}.$$

Esta relación se puede escribir en la forma

$$\mathbf{b} = \lambda \mathbf{a} = \lambda \mathbf{a} + \mathbf{o} = \lambda \mathbf{a} + 0 \cdot \mathbf{c} \quad (1.13)$$

(aplicando la 3ª propiedad de las operaciones lineales y el corolario (1.8) de sus propiedades), pero ésta es la expresión del vector **b** en forma de combinación lineal de los vectores **a** y **c**, que demuestra la dependencia lineal del sistema **a**, **b**, **c**. Pasando de (1.13) a una escritura análoga a (1.12), nos damos cuenta de que precisamente el hecho de que el coeficiente del vector **b** sea diferente de cero en esta ecuación da la posibilidad de representar el vector **b** en forma de combinación lineal de los otros dos vectores.

Finalmente, consideremos el caso en que aunque sólo sea uno de los tres vectores es nulo, por ejemplo, $\mathbf{c} = \mathbf{o}$. El vector nulo puede representarse siempre en forma de combinación lineal de los otros dos vectores:

$$0 \cdot \mathbf{a} + 0 \cdot \mathbf{b} = \mathbf{o} + \mathbf{o} = \mathbf{o} = \mathbf{c}, \quad (1.14)$$

de lo que se sigue que el sistema en que figura el vector nulo es necesario que sea li-

nealmente dependiente. Una combinación lineal en la cual todos los coeficientes sin excepción son nulos, se llama *trivial*. De (1.14) se sigue la relación

$$0\cdot\mathbf{a} + 0\cdot\mathbf{b} + 1\cdot\mathbf{c} = \mathbf{o}$$

del mismo tipo que (1.12). Aquí también tiene importancia que el coeficiente del vector c es distinto de cero (aunque el propio vector c es nulo).

Los tres casos examinados son suficientes para fundamentar la afirmación de que tres vectores coplanares cualesquiera son linealmente dependientes.

De paso hemos conocido la forma lacónica y de gran contenido de expresar la dependencia lineal de vectores. De los vectores del sistema dado se plantea una combinación lineal *igual a un vector nulo* (véase (1.12)). Si existe la posibilidad de construir tal combinación de un modo *no trivial*, es decir, de manera que por lo menos un coeficiente difiera de cero en la combinación, el vector a que corresponde este coeficiente se expresa, por una ecuación del tipo (1.12) linealmente por medio de los demás vectores del sistema. La condición de no trivialidad de la combinación lineal (1.12) se puede escribir en forma general, sin indicar concretamente qué coeficientes son distintos de cero:

$$\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 \neq 0. \qquad (1.15)$$

La compatibilidad de la relación (1.12) con la condición de no trivialidad (1.15) significa que el sistema de vectores a, b, c es linealmente dependiente. El cumplimiento de la relación (1.12) siempre puede conseguirse, cualesquiera que sean los vectores a, b, c. En último caso se puede plantear la combinación lineal trivial

$$0\cdot\mathbf{a} + 0\cdot\mathbf{b} + 0\cdot\mathbf{c} = \mathbf{o},$$

la cual es necesariamente igual a un vector nulo. Pero de una combinación lineal trivial no se puede obtener la expresión de un vector del sistema por medio de los otros, ya que es imposible dividir por cero. Y si los vectores a, b, c son tales que para ellos la igualdad (1.12) sólo puede cumplirse en el caso trivial (la condición (1.15) es incompatible con la (1.12)), en principio queda excluida la posibilidad de representar uno de los vectores del sistema en forma de combinación lineal de los demás. Este sistema de vectores se dice que es *linealmente independiente*. Tres vectores linealmente independientes no se encuentran en el mismo plano y no pueden ser reducidos a un plano por medio de una traslación paralela. Son no coplanares.

La distinción entre dependencia e independencia lineal de vectores se extiende fácilmente, valiéndose de relaciones del tipo (1.12) y (1.15), a sistemas con un número cualquiera de vectores, y no sólo en el sentido de aumento, sino también en el de

disminución. El menor sistema es el formado por un solo vector. A él no puede aplicarse la representación de dependencia o independencia lineal introducida al principio de este capítulo, ya que en este sistema no existen los «demás» vectores. No obstante, para un solo vector también tienen sentido los razonamientos acerca de la reducción a cero de su combinación lineal. Si la combinación lineal del vector **a** puede reducirse a un vector nulo de una forma no trivial

$$\lambda \mathbf{a} = \mathbf{o}, \ \lambda^2 \neq 0,$$

es oportuno decir que dicho vector es linealmente dependiente. Las dos últimas relaciones sólo son compatibles para un vector nulo. Por lo tanto, el vector nulo representa un sistema linealmente dependiente formado por un solo vector. Pero si la combinación lineal $\lambda \mathbf{a}$ sólo se puede transformar en vector nulo de un modo trivial

$$\lambda \mathbf{a} = \mathbf{o} \ \textit{únicamente} \text{ si } \lambda = 0,$$

entonces $\mathbf{a} \neq \mathbf{o}$ (véase (1.10)). Por consiguiente todo vector no nulo representa un sistema linealmente independiente.

La forma de escribir las condiciones de dependencia lineal de los vectores por medio de las relaciones (1.12) y (1.15) ejerció influencia sobre el contenido mismo de este concepto, poniendo de manifiesto la posibilidad de su ampliación. En el álgebra lineal se dan las siguientes definiciones de las relaciones de dependencia e independencia de vectores.

Un sistema de vectores $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k$, se llama *linealmente dependiente*, si con estos vectores se puede construir una combinación lineal igual a un vector nulo:

$$\lambda_1 \mathbf{a}_1 + \lambda_2 \mathbf{a}_2 + \ldots + \lambda_k \mathbf{a}_k = \mathbf{o} \quad (1.16)$$

y se cumple la condición de no trivialidad

$$\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \ldots + \lambda_k^2 \neq 0. \quad (1.17)$$

Un sistema de vectores $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k$ se dice que es *linealmente independiente*, si con estos vectores es imposible construir una combinación lineal, no trivial, igual a un vector nulo.

Es decir, con vectores linealmente independientes se puede construir una combinación lineal (1.16) sólo de un modo trivial, mientras que con vectores linealmente dependientes puede construirse trivial o no trivialmente.

Ahora podemos advertir la relación que existe entre la dimensión de un espacio y el número máximo de vectores linealmente independientes que puede haber en él. Antes hemos considerado un conjunto de vectores paralelos a un *vector* **a** *no nulo*. Llamemos R^1 a este conjunto. Un caso particular del conjunto R^1 es una línea recta (véase la fig. 3). Como dos vectores cualesquiera del conjunto R^1 son linealmente dependientes,

el mayor sistema linealmente independiente de este conjunto tiene menos de dos vectores. Al mismo tiempo, se encuentra en él un sistema linealmente independiente, formado por un solo vector (cualquier vector no nulo). Por lo tanto, el número máximo de vectores independientes linealmente que puede haber en el conjunto R^1 es igual a uno. En eso consiste precisamente el sentido matemático exacto de la representación, conocida por todos, de que la línea recta es un espacio unidimensional.

El conjunto de todos los vectores que se encuentran en un plano o, en un sentido más amplio, que son paralelos a un plano, representa un espacio bidimensional R^2. Como tres vectores cualesquiera de este conjunto son linealmente dependientes, el mayor sistema linealmente independiente que puede encontrarse en él tiene menos de tres vectores. Al mismo tiempo en R^2 se encontrará un sistema linealmente independiente, formado por dos vectores (cualquier par de vectores no paralelos entre sí). Por consiguiente, el número máximo de vectores linealmente independientes que puede haber en un espacio bidimensional es igual a dos.

Los espacios unidimensionales y bidimensionales se separan de todo el espacio que perciben los sentidos imponiendo limitaciones a los vectores elegidos. En el espacio unidimensional R^1 entran todos los vectores colineares de un vector dado $\mathbf{e}_1$ no nulo (linealmente independiente):

$$R^1 = \{\mathbf{a} : \mathbf{a} = \alpha_1 \mathbf{e}_1,\ -\infty < \alpha_1 < \infty,\ \mathbf{e}_1 \neq \mathbf{o}\}.$$

En el espacio bidimensional R^2 entran todos los vectores coplanares de dos vectores dados $\mathbf{e}_1$ y $\mathbf{e}_2$, linealmente independientes:

$$R^2 = \{\mathbf{a} : \mathbf{a} = \alpha_1 \mathbf{e}_1 + \alpha_2 \mathbf{e}_2,\ \alpha_1,\ \alpha_2 \in]-\infty; \infty[,$$
$$\lambda_1 \mathbf{e}_1 + \lambda_2 \mathbf{e}_2 = \mathbf{o} \text{ sólo cuando } \lambda_1 = \lambda_2 = 0\}.$$

Si se eliminan estas limitaciones, en el espacio perceptible sensorialmente se pueden elegir tres vectores no coplanares (linealmente independientes) $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$. Consideremos el conjunto de todos los vectores que sean combinaciones lineales de esos tres:

$$\alpha_1 \mathbf{e}_1 + \alpha_2 \mathbf{e}_2 + \alpha_3 \mathbf{e}_3 = \mathbf{a}. \qquad (1.18)$$

Para mayor claridad vamos a suponer que los vectores $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ y todas sus combinaciones lineales (1.18) tienen un mismo punto de aplicación O (fig. 6). En este caso, al variar los coeficientes α_1, α_2, α_3 desde $-\infty$ hasta $+\infty$, independientemente unos de otros, el extremo del vector $\mathbf{a} = \overline{OM}$ recorrerá todos los puntos del espacio percibido por los sentidos. El origen de todo vector $\mathbf{b}$ que tomemos en este espacio se puede, mediante traslación paralela, hacer coincidir con el punto O y, como resultado de esto, el vector $\mathbf{b}$ coincidirá con uno de los vectores (1.18). Por lo tanto, todo vector de un espacio percibido por los

sentidos es una combinación lineal de los vectores e_1, e_2, e_3 que forman el sistema linealmente independiente. De aquí puede sacarse la conclusión de que cuatro vectores cualesquiera de un espacio perceptible por los sentidos son linealmente dependientes y que el mayor sistema linealmente

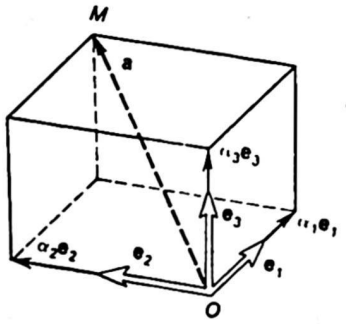


Fig. 6

independiente que puede encontrarse en este espacio tiene tres vectores. En esto radica el profundo sentido de nuestra idea del espacio tridimensional percibido por los sentidos.

Así, pues, como resultado del estudio de las relaciones de dependencia e independencia lineal de los vectores geométricos, llegamos a la definición matemática de dimensión del espacio: *se llama dimensión de un espacio el número máximo de vectores linealmente independientes que hay en él.* De paso descubrimos que el mayor sistema, linealmente independiente, de vectores de un espacio, hace las veces de *base* de dicho espacio. En efecto, todo vector de un espacio dado puede expresarse, valiéndose de operaciones lineales, por medio de los vectores de base, y todo el espacio se puede definir como el conjunto de las combinaciones posibles de los vectores básicos. En la fig. 6 se representa la base e_1, e_2, e_3 de un espacio tridimensional. En la fig. 4 hacen las veces de base de un plano los vectores e_1, e_2. Y en la fig. 3, la base de la recta es el vector $a \neq o$. *El número de vectores de la base es igual a la dimensión del espacio.* Variar el número de vectores de la base (fundamento del espacio) significa variar todo el espacio. Por ejemplo, si de la base e_1, e_2, e_3 se excluye el vector e_3 (véase la fig. 6), del espacio tridimensional separamos un espacio bidimensional, ya que todos los vectores que son combinaciones lineales de la forma $\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2$ son necesariamente paralelos al plano cuyos vectores directores son e_1 y e_2.

Dos rasgos muy importantes de la base son:

1) la base es un sistema lineal de vectores independiente;

2) *todo* vector de un espacio es una combinación lineal de los vectores de la base de este espacio.

Un sistema de vectores que no satisfaga aunque sólo sea una de las condiciones indicadas no puede ser base de un espacio. La representación de un vector en forma de

combinación lineal de los vectores básicos también se suele llamar *descomposición del vector según la base*, y los coeficientes de las combinaciones, *coordenadas* del vector respecto de la base. Por ejemplo, en la descomposición del vector (1.18), los números α_1, α_2, α_3 son las coordenadas del vector **a** respecto de la base $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$.

§ 4. Espacio lineal abstracto

El famoso matemático Henry Poincaré, que hizo una gran aportación a la elaboración de la idea de la teoría de la relatividad, dijo que «la matemática es el arte de llamar cosas distintas con un mismo nombre» [7]. Éste es el secreto de que las verdades matemáticas se apliquen extensamente a los diversos fenómenos de la naturaleza. Ahora nos va a interesar el hecho de que existan conjuntos formados por elementos que no se parecen a los vectores geométricos, pero que en su estructura tienen mucho de común con el espacio que perciben los sentidos.

Consideremos como ejemplo el conjunto $\{P_n(t)\}$ de todos los polinomios de una variable t de grado *no mayor que* n. Los elementos (polinomios) de este conjunto

$$A_n = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \ldots + a_{n-1} t^{n-1} + a_n t^n,$$
$$B_{n-1} = b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + \ldots + b_{n-1} t^{n-1}$$

se pueden sumar unos con otros por separado, obteniendo como resultado elementos del mismo conjunto:

$$A_n + B_{n-1} = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1) t + \ldots + (a_{n-1} + b_{n-1}) t^{n-1} + (a_n + 0) t^n = c_0 + c_1 t + \ldots + c_{n-1} t^{n-1} + c_n t^n = C_n \in \{P_n(t)\}.$$

La suma de polinomios tiene propiedades conmutativas y asociativas semejantes a las propiedades 1ª y 2ª de las operaciones lineales con vectores (véase el § 2). En el conjunto $\{P_n(t)\}$ hay un polinomio que desempeña el papel de elemento nulo del conjunto:

$$O_n(t) = 0 + 0 \cdot t + 0 \cdot t^2 + \ldots + 0 \cdot t^n.$$

La suma de este elemento con un polinomio cualquiera $A_n(t)$ es igual a $A_n(t)$:

$$A_n(t) + O_n(t) = A_n(t)$$

(véase la 3ª propiedad de las operaciones lineales con vectores). Para cada polinomio $A_n(t)$ se encuentra en el conjunto $\{P_n(t)\}$ un elemento (polinomio) opuesto

$$(-A_n(t)) = -a_0 - a_1 t - a_2 t^2 - \ldots - a_n t^n$$

que satisface la relación

$$A_n(t) + (-A_n(t)) = O_n(t)$$

(véase la 4ª propiedad de las operaciones lineales con vectores).

El producto de un polinomio por un número cualquiera λ es un polinomio del mismo grado:

$$\lambda \cdot A_n(t) = \lambda a_0 + (\lambda a_1)\, t + (\lambda a_2) t^2 + \\ + \ldots + (\lambda a_n)\, t^n,$$

es decir, también un elemento del conjunto $\{P_n(t)\}$. No es difícil demostrar que la operación de la multiplicación de un polinomio por un número tiene propiedades análogas a las $5^a - 8^a$ de las operaciones con vectores.

Otro ejemplo es el conjunto de números reales. Para los elementos de este conjunto también quedan determinadas las operaciones de adición y multiplicación por un número real que tienen las propiedades $1^a - 8^a$ de las operaciones lineales. En el capítulo siguiente se estudiará el conjunto de números complejos. Éstos se pueden sumar y multiplicar por números reales, obteniendo como resultado números complejos; dichas operaciones tienen también las mismas propiedades que las operaciones lineales con vectores geométricos.

La enumeración de ejemplos semejantes podría continuarse, pero lo dicho es ya suficiente para ver que entre todos los posibles conjuntos, que difieren por la naturaleza de sus elementos, ofrecen especial interés aquellos con cuyos elementos se pueden realizar operaciones parecidas a las operaciones con vectores geométricos. El parecido consiste no en el carácter concreto de las operaciones, que precisamente puede ser muy distinto, sino en las propiedades algebraicas de las operaciones. En primer lugar nos referimos a dos operaciones: la primera, a cada par de elementos del conjunto le asigna un elemento del mismo conjunto; la segunda, a cada elemento del conjunto y a cualquier número real le asigna un elemento del mismo conjunto. En segundo lugar, estas operaciones deben satisfacer las mismas condiciones que las propiedades 1^a—8^a de las operaciones lineales con vectores geométricos. La totalidad de las propiedades $1^a - 8^a$ desempeñan el papel de definición de las operaciones lineales abstractas. Para los conjuntos de este tipo se necesita un nombre genérico, lo mismo que se necesita el nombre de «árbol» para designar a muchas especies vegetales (abeto, palmera, abedul, roble, etc.). Si este nombre hubiera que inventarlo ahora, podría proponerse el término «conjunto lineal». En él se expresa con bastante claridad el hecho de que se trata de un objeto abstracto (ya que el concepto de conjunto es producto de una amplia abstracción matemática) y lleva la indicación de la característica general esencial de dichos conjuntos, es decir, la posibilidad de realizar con sus elementos operaciones *lineales*. Desde el punto de vista algebraico un conjunto de segmentos dirigidos, o es-

pacio geométrico, no tiene privilegios profundos frente a los otros conjuntos lineales. Pero fue estudiado antes que ellos y, además, la comprensión de las propiedades del espacio geométrico tiene especial importancia. Esta circunstancia dejó su huella en la terminología de los conceptos algebraicos. Arraigó la costumbre de llamar al conjunto lineal abstracto *espacio lineal*, y a sus elementos, *vectores* (en sentido abstracto). Las asociaciones geométricas, ligadas con estos términos, no confunden a los matemáticos, pero crean ciertas dificultades a los estudiantes. Por eso, todo pedagogo atento debe subrayar en cada caso que el concepto abstracto de espacio lineal y de sus elementos (vectores abstractos) no tiene nada de geométrico. En particular, un conjunto de polinomios de grado no mayor que n se ajusta a la definición de espacio lineal, y un polinomio (elemento) separado de este conjunto puede ser llamado vector en sentido abstracto. A continuación se da la definición completa de espacio lineal (véase [8]).

Un conjunto R de elementos de cualquier naturaleza se llama espacio lineal si se cumplen las tres condiciones siguientes:

I. Existe una regla por medio de la cual a dos elementos a y b cualesquiera del conjunto R se les asigna un determinado elemento c perteneciente al mismo conjunto. Esta regla se llama operación de *adición* de los elementos del conjunto R y se escribe en la forma

$$a + b = c.$$

II. Existe una regla mediante la cual a un elemento a cualquiera del conjunto R y a un número real cualquiera λ se les asigna un elemento u determinado, perteneciente al conjunto R. Esta regla se llama operación de *multiplicar un elemento del conjunto R por un número* λ y se escribe en la forma

$$\lambda a = u, \text{ o bien } a\lambda = u.$$

III. Las dos reglas (operaciones) indicadas cumplen las siguientes condiciones, llamadas *axiomas del espacio lineal* (aquí a, b, c son los elementos del conjunto R, y λ y μ, números reales):

1° $a + b = b + a$;

2° $(a + b) + c = a + (b + c)$;

3° en el conjunto R existe un elemento nulo o tal, que $a + o = a$ para cualquier elemento a de R;

4° para cada elemento a del conjunto R existe en dicho conjunto un elemento opuesto $(-a)$ tal, que $a + (-a) = o$;

5° $1 \cdot a = a$ para cualquier elemento a del conjunto R;

6° $\lambda(\mu a) = (\lambda\mu)\, a$;

7° $(\lambda + \mu)\, a = \lambda a + \mu a$;

8° $\lambda(a + b) = \lambda a + \lambda b$.

Para no confundir los vectores con los números conviene designar los números con letras griegas y los vectores abstractos con

letras latinas. A veces, en vez del término «espacio lineal» se utilizan los de «espacio afín» y de «espacio vectorial». En este libro nos permitiremos algunas veces emplear el término de «conjunto lineal» como sinónimo de espacio lineal.

De los axiomas 1° — 8° se infieren lógicamente los siguientes corolarios:

1) en todo conjunto lineal R existe un elemento nulo y, además, éste es único;

2) para cada elemento $a \in R$ se encuentra en R un elemento opuesto $(-a)$, además, el único, que permite unívocamente determinar la diferencia de los elementos

$$a - b = a + (-b);$$

3) el elemento opuesto al elemento nulo es el mismo elemento nulo;

4) el producto de un elemento cualquiera $a \in R$ por el número 0 es un elemento nulo:

$$0 \cdot a = o;$$

5) el producto de un elemento cualquiera $a \in R$ por el número (-1) es un elemento opuesto al a: $(-1) \cdot a = (-a)$;

6) el producto del elemento nulo $o \in R$ por cualquier número λ es un elemento nulo: $\lambda \cdot o = o$.

No vamos a dar las demostraciones de estos corolarios.

Utilizando los axiomas 1° — 8° y los corolarios de ellos se puede demostrar que cualquier combinación de operaciones lineales sobre los elementos $a_1, a_2, \ldots, a_k$ del conjunto lineal R se reduce a la expresión

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \ldots + \lambda_k a_k,$$

en la que $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ son números reales. Como con los elementos del conjunto lineal R se pueden hacer operaciones lineales, en él están determinadas las relaciones de dependencia e independencia de los elementos.

Si con los elementos $a_1, a_2, \ldots, a_k$ del conjunto R se puede construir una combinación lineal no trivial, igual al elemento nulo $o \in R$, es decir, si pueden cumplirse conjuntamente las condiciones

$$\begin{aligned} &\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \ldots + \lambda_k a_k = o, \\ &\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \ldots + \lambda_k^2 \neq 0, \end{aligned} \tag{1.19}$$

el sistema de elementos $a_1, a_2, \ldots, a_k$ es *linealmente dependiente*. El sistema de elementos $a_1, a_2, \ldots, a_k$ del conjunto R se dice que es *linealmente independiente* si para ellos las relaciones (1.19) son incompatibles.

El número máximo de elementos linealmente independientes que puede haber en un conjunto lineal R se llama *dimensión* de este conjunto. A nosotros nos es difícil imaginar claramente un espacio geométrico con un número de medidas mayor que tres y podemos dudar de que tal espacio exista en la naturaleza. Pero a la dimensión de un

conjunto lineal abstracto no se le imponen limitaciones de carácter físico y geométrico. No es difícil poner ejemplos de conjuntos lineales de cualquier dimensión. Así, en un conjunto $\{P_n(t)\}$ de polinomios de grado no mayor que n se encuentra el sistema de $n+1$ polinomios

$$M_0(t) = t^0 = 1,\ M_1(t) = t,$$
$$M_2(t) = t^2,\ \ldots,\ M_n(t) = t^n,$$

con los cuales no se puede construir una combinación *no trivial* igual al polinomio nulo. Por lo tanto, la dimensión del conjunto $\{P_n(t)\}$ no es menor que $n+1$. Existen incluso conjuntos lineales en los cuales el número de elementos linealmente independientes es infinito. Un ejemplo de conjunto de dimensión infinita es el conjunto de funciones de una variable, determinadas y continuas en un intervalo dado.

Si la dimensión de un conjunto lineal es finita, existe la posibilidad de representar cualquier elemento del conjunto en forma de combinación lineal de un número finito de elementos linealmente independientes de este conjunto. Sea R^n un conjunto lineal de dimensión n. Esto significa que en él se encuentra un sistema linealmente independiente formado por n elementos $e_1, e_2, \ldots, e_n$. Añadiéndole un elemento $a \in R^n$ cualquiera, es necesario obtener un sistema linealmente dependiente

para el cual, por definición, sean correctas las relaciones

$$\lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_n e_n + \lambda_{n+1} a = o,$$
$$\lambda_1^2 + \ldots + \lambda_n^2 + \lambda_{n+1}^2 \neq 0. \qquad (1.20)$$

En la combinación lineal (1.20) el coeficiente λ_{n+1} no puede ser nulo. En efecto, si fuera $\lambda_{n+1} = 0$, de (1.20) se deduciría que

$$\lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_n e_n = o,\ \lambda_1^2 + \ldots + \lambda_n^2 \neq 0,$$

y esto significaría que el sistema de elementos $e_1, e_2, \ldots, e_n$ es linealmente dependiente, lo cual contradice la condición Como $\lambda_{n+1} \neq 0$, existe un número $1/\lambda_{n+1}$, y de la combinación lineal (1.20) se obtiene

$$a = -\frac{\lambda_1}{\lambda_{n+1}} e_1 - \ldots - \frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}} e_n =$$
$$= \alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_n e_n.$$

Así, pues, el elemento $a \in R^n$ se ha representado en forma de combinación lineal de n elementos linealmente independientes del conjunto R^n. Y como el elemento a se ha tomado en R^n de un modo totalmente arbitrario, hemos demostrado que *cualquier* elemento de este conjunto es una combinación lineal de los elementos $e_1, e_2, \ldots, e_n$ Los elementos $e_1, e_2, \ldots, e_n$ desempeñan el papel de base del conjunto lineal R^n

La existencia de la base es el rasgo más destacado de los conjuntos lineales de di-

mensión finita. Aunque el número de elementos de un conjunto lineal sea infinito, cada uno de ellos puede ser expresado en forma de combinación lineal de un número finito de elementos básicos o, como suele decirse, descompuesto según la base. En este caso es correcto el siguiente importante

Teorema. *Todo elemento a de un conjunto lineal R^n de dimensión n se descompone, según la base de dicho conjunto, por un procedimiento único.*

Este teorema se demuestra fácilmente por reducción al absurdo. Supongamos que además de la descomposición

$$a = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \ldots + \alpha_n e_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$$

existe otra descomposición cualquiera del elemento a respecto de la misma base

$$a = \alpha'_1 e_1 + \alpha'_2 e_2 + \ldots + \alpha'_n e_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha'_i e_i$$

(por lo menos uno de los coeficientes α'_i se diferencia del coeficiente respectivo α_i). Restando de la primera descomposición la segunda, se obtiene

$$o = a - a = \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i - \alpha'_i)\, e_i.$$

Esta es una combinación lineal de elementos básicos igual a un elemento nulo. En virtud de la independencia lineal de la base, esta combinación sólo puede ser trivial:

$$\alpha_i - \alpha'_i = 0 \text{ para cualquier } i = 1, 2, \ldots, n.$$

Por lo tanto,

$\alpha'_i = \alpha_i$ para cualquier $i = 1, 2, \ldots, n$.

El teorema queda demostrado.

Los coeficientes de la descomposición del elemento del conjunto lineal según la base del conjunto se llaman *coordenadas* del elemento respecto de la base. El teorema demostrado nos dice que cada elemento se determina unívocamente por sus coordenadas respecto de la base. Esto da la posibilidad de realizar las operaciones sobre los elementos del conjunto lineal como operaciones sobre las coordenadas de los elementos. Conviene escribir la descomposición del elemento según la base abreviadamente, en forma de columnas de coordenadas:

$$a = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \ldots + \alpha_n e_n = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \ldots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \qquad (1.21)$$

Desde ahora la *columna de coordenadas* será para nosotros la representante del elemento del conjunto lineal.

Aplicando los axiomas 2°, 8° y 6° del espacio lineal, vamos a demostrar que si el elemento $a \in R^n$ se multiplica por el nú-

mero λ, cada coordenada de este elemento queda multiplicada por λ:

$$\lambda a = \lambda(\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \ldots + \alpha_n e_n) =$$

$$= \lambda \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \ldots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = (\lambda\alpha_1)\, e_1 + (\lambda\alpha_2)\, e^2 + \ldots$$

$$\ldots + (\lambda\alpha_n)\, e_n = \begin{pmatrix} \lambda\alpha_1 \\ \lambda\alpha_2 \\ \ldots \\ \lambda\alpha_n \end{pmatrix}. \quad (1.22)$$

De acuerdo con el teorema demostrado antes, el elemento λa, no puede tener otras coordenadas respecto de la base e_1, e_2, ... , e_n.

Partiendo de la representación de los elementos a y b del conjunto lineal R^n en columnas de coordenadas, se puede hallar de un modo análogo, valiéndose de los axiomas 1°, 2° y 7°, las coordenadas de la suma de los elementos $a + b$:

$$a + b = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \ldots \\ \alpha_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \ldots \\ \beta_n \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha_1 + \beta_1 \\ \alpha_2 + \beta_2 \\ \ldots\ldots \\ \alpha_n + \beta_n \end{pmatrix}. \quad (1.23)$$

Ahora vemos que cuando se forma una combinación lineal de los elementos de un conjunto lineal, sus coordenadas se combinan de la misma forma:

$$\lambda a + \mu b = \lambda \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \ldots \\ \alpha_n \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \ldots \\ \beta_n \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda\alpha_1 + \mu\beta_1 \\ \lambda\alpha_2 + \mu\beta_2 \\ \ldots\ldots \\ \lambda\alpha_n + \mu\beta_n \end{pmatrix}. \quad (1.24)$$

§ 5. Propiedades lineales del espacio sensorialmente perceptible

En el § 4 tuvimos que desarrollar conceptos parecidos a los que nos referimos en el § 3, aunque en forma generalizada. Pero precisamente la generalización es lo que tiene más valor. Lo importante es comprender que las relaciones ligadas con las operaciones lineales no son relaciones específicamente geométricas, sino que tienen gran difusión en la naturaleza. Los rasgos de parecido del espacio que perciben los sentidos con todos los conjuntos lineales se llaman *propiedades lineales del espacio*. La que tiene más importancia de todas ellas es la existencia de la base en el espacio y la posibilidad de expresar cualquiera de los innumerables vectores que hay en el espa-

cio en forma de combinación lineal de varios vectores básicos. La dimensión del espacio también es una propiedad lineal suya.

Para la descripción total de un espacio geométrico no basta utilizar solamente vectores libres. En el espacio geométrico tiene especial importancia la determinación de los puntos y de la diferencia entre ellos.

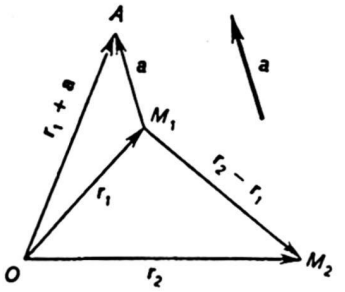


Fig. 7

Un vector libre no está ligado con punto determinado alguno. No obstante, valiéndose de vectores se pueden indicar determinados puntos del espacio geométrico como sigue. Se toma un punto cualquiera como punto de referencia y se le da el nombre de *polo*. Entonces cualquier punto del espacio puede ser indicado por un vector, cuyo origen se encuentre en el polo y cuyo extremo sea el punto indicado. Todo vector que tenga por origen el polo del espacio se llama *radio vector*. En la fig. 7 el polo se designa por la letra O, el radio vector del punto M_1, por $\overline{OM_1} = \mathbf{r}_1$, y el radio vector del punto M_2, por $\overline{OM_2} = \mathbf{r}_2$. Los radios vectores pueden participar en las operaciones lineales junto con los vectores libres, pero en este caso el resultado de la operación será un vector *fijo*, es decir, con punto de aplicación (origen) determinado. Por ejemplo, en la fig. 7, el vector

$$\mathbf{r}_1 + \mathbf{a} = \overline{OA}$$

está aplicado al polo O, y el vector

$$\overline{M_1M_2} = \overline{OM}_2 - \overline{OM}_1 = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$$

está aplicado al punto M_1. El radio vector, lo mismo que un vector libre, se puede descomponer según la base del espacio:

$$\mathbf{r} = \overline{OM} = \rho_1\mathbf{e}_1 + \rho_2\mathbf{e}_2 + \rho_3\mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix}\rho_1\\ \rho_2\\ \rho_3\end{pmatrix}, \quad (1.25)$$

pero los coeficientes de esta descomposición caracterizan ya a un punto M determinado del espacio, o sea, el extremo del radio vector $\mathbf{r}$. *Se llaman coordenadas de un punto las coordenadas de su radio vector.*

El conjunto de la base y el polo se denomina *sistema de coordenadas cartesianas*. El polo se llama también *origen de coordenadas*. Las rectas que pasan por el origen de coordenadas en las direcciones de los vectores básicos reciben el nombre de *ejes de coordenadas*. La posibilidad de indicar cualquier punto M en un espacio, perceptible

por los sentidos, por medio de las coordenadas, respecto de un sistema de coordenadas cartesianas previamente elegido (véase (1.25)), es una propiedad lineal del espacio. Dando a cada una de las coordenadas del punto valores cualesquiera desde $-\infty$ hasta $+\infty$, con independencia unos de otros,

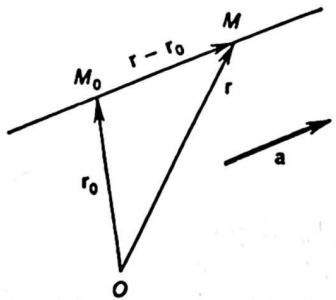


Fig. 8

obtendremos todos los radios vectores posibles y definiremos todo el espacio perceptible por los sentidos como un conjunto de puntos. Consideremos aquellos subconjuntos de este conjunto, o lugares geométricos de los puntos del espacio sensorialmente perceptible, que pueden ser definidos por medio de ecuaciones lineales, es decir, de ecuaciones en las cuales sólo se emplean operaciones lineales sobre los radios vectores y los vectores libres.

En la fig. 8 se representa una recta que pasa por el punto M_0 y es paralela al vector **a** (vector director de la recta). El punto M_0 viene indicado por el radio vector $\mathbf{r}_0 = \overline{OM}_0$ y el punto arbitrario M de la recta en cuestión, por el radio vector $\mathbf{r} = \overline{OM}$. La diferencia de los radios vectores

$$\mathbf{r} - \mathbf{r}_0 = \overline{M_0M}$$

es un vector fijo, perteneciente a la recta que se considera y aplicado al punto M_0.

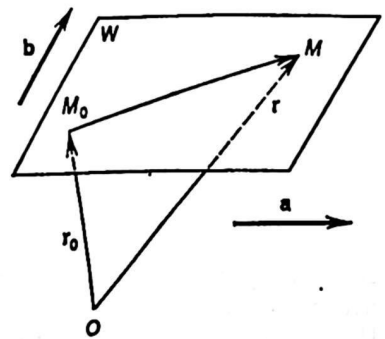


Fig. 9

El hecho de que los vectores **a** y $\overline{M_0M}$ sean colineares se expresa por medio de la ecuación lineal

$$\mathbf{r} - \mathbf{r}_0 = \lambda\mathbf{a} \text{ o bien } \mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \lambda\mathbf{a}, \quad (1.26)$$

en la que λ es un parámetro que puede variar desde $-\infty$ hasta $+\infty$, pero que para cada punto de la recta tiene un valor determinado. La relación (1.26) se llama *ecuación paramétrico-vectorial de la recta.*

En la fig. 9 se representa un plano W que pasa por el punto M_0 y es paralelo a los

vectores linealmente independientes **a** y **b** (vectores directores del plano). $\overrightarrow{OM}_0 = \mathbf{r}_0$ es el radio vector del punto fijo M_0, y $\overrightarrow{OM} = \mathbf{r}$, el radio vector de un punto arbitrario M en el plano W. El vector fijo

$$\overrightarrow{M_0M} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0$$

pertenece al plano W, está aplicado al punto M_0 y el hecho de que sea coplanar de los vectores **a** y **b** se expresa por la ecuación lineal

$$\mathbf{r} - \mathbf{r}_0 = \lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b}, \text{ o bien}$$

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b}. \quad (1.27)$$

Aquí los parámetros λ y μ pueden variar, con independencia uno de otro, desde $-\infty$, hasta $+\infty$, pero para cada punto del plano tienen valores determinados. La relación (1.27) se llama *ecuación paramétrico-vectorial del plano.*

La pertenencia de los puntos a una recta o plano determinado es una propiedad lineal del espacio geométrico, ya que se determina solamente por las relaciones lineales entre los vectores.

Las relaciones de dependencia lineal e independencia lineal de los vectores permiten distinguir:

—el paralelismo o no paralelismo de las rectas;

—el paralelismo o no paralelismo de una recta y un plano;

—el paralelismo o no paralelismo de los planos.

Por ejemplo, las rectas definidas por las ecuaciones

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + \lambda\mathbf{a} \text{ y } \mathbf{r} = \mathbf{r}_2 + \mu\mathbf{b},$$

serán paralelas si sus vectores directores **a** y **b** son linealmente dependientes, y no paralelas, si dichos vectores son linealmente independientes. El paralelismo o no paralelismo de los vectores puede juzgarse por sus coordenadas. Si los vectores **a** y **b** vienen dados en columnas de coordenadas (véase (1.21)), cuando los vectores son paralelos se cumple la relación

$$\mathbf{b} = \nu\mathbf{a} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}\beta_1\\ \beta_2\\ \beta_3\end{pmatrix} = \nu\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\end{pmatrix},$$

que indica que las coordenadas homónimas de las rectas son proporcionales:

$$\frac{\beta_1}{\alpha_1} = \frac{\beta_2}{\alpha_2} = \frac{\beta_3}{\alpha_3} = \nu.$$

La ausencia de esta proporcionalidad significa que los vectores **a** y **b** no son paralelos.

Una recta $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + \lambda\mathbf{a}$ será paralela a un plano $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 + \mu\mathbf{b} + \nu\mathbf{c}$ si sus vectores directores **a**, **b**, **c** forman un sistema linealmente dependiente, y no será paralela si dicho sistema es linealmente independiente. Si existe dependencia lineal entre los vectores **a**, **b**, **c**, por la misma dependen-

cia (con los mismos coeficientes) estarán ligadas las coordenadas homónimas de estos vectores (véase (1.24)).

La operación lineal de multiplicar un vector por un número real da la posibilidad de expresar la razón de las longitudes de los segmentos *paralelos*. En cuanto a la comparación de longitudes de segmentos *no paralelos* es cuestión que no entra en el marco de las propiedades del espacio.

§ 6. Propiedades métricas del espacio sensorialmente perceptible

En la práctica diaria la comparación de las longitudes de segmentos no paralelos no ofrece mayores dificultades que la comparación de segmentos paralelos. La diferencia de principio entre estos dos problemas sólo se pone de manifiesto cuando se analizan profundamente las propiedades del espacio, recurriendo a los métodos algebraicos. La independencia lineal de dos vectores no paralelos significa que entre ellos no existe una relación que pueda ser expresada exclusivamente por medio de operaciones lineales. Por eso la diferencia de longitudes de los vectores *linealmente independientes* es simplemente indeterminable por operaciones lineales. Estas operaciones permiten distinguir con toda certeza el paralelismo o no paralelismo de las rectas y los planos. Pero en el espacio perceptible por los sentidos, además de eso, podemos distinguir el estado de no paralelismo por la magnitud del ángulo. Existe una evidente relación mutua entre la imposibilidad de comparar las longitudes de los segmentos no paralelos y la imposibilidad de expresar la magnitud del ángulo entre ellos valiéndose únicamente de operaciones lineales, ya que los procedimientos para medir los ángulos se basan en la comparación de las longitudes de los lados de un triángulo.

Las propiedades del espacio perceptible por los sentidos, en virtud de las cuales puede determinarse en él la relación entre las longitudes de cualesquiera segmentos paralelos y la magnitud del ángulo entre ellos, reciben el nombre de *propiedades métricas*. La esencia de las propiedades métricas se puede comprender mejor estudiando la operación algebraica por medio de la cual se expresan las longitudes de los vectores y los ángulos entre ellos, del mismo modo que el estudio de las operaciones lineales ayudó a comprender las propiedades lineales del espacio.

La teoría geométrica partió para su desarrollo histórico de las representaciones evidentes de la longitud y del ángulo que nos proporcionaba la experiencia, y elaboró los procedimientos analíticos de descripción de las relaciones mutuas entre las longitudes y los ángulos en las distintas figuras. Por este camino se puso de manifiesto el importante papel que desempeña la magni-

tud llamada *producto escalar de vectores*. Si

$|\mathbf{a}|$ es la longitud (módulo) del vector $\mathbf{a}$,

$|\mathbf{b}|$ es la longitud (módulo) del vector $\mathbf{b}$ y

$\cos(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}})$ es el co seno del ángulo entre los vectores $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$, el producto escalar de los vectores $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ (que designaremos por $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$) se expresa por la fórmula siguiente:

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \cos(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}}). \quad (1.28)$$

El nombre de la operación del producto escalar de vectores se debe a que ella le asigna a cada par de vectores un número real determinado que recibe el nombre de escalar. El término «escala» proviene del latín *scala* (escalera). Toda magnitud matemática o física que puede expresarse por un número real y representarse por un punto sobre el eje numérico (escala), se dice que es una *magnitud escalar* o, simplemente, un escalar.

Partiendo de la fórmula (1.28) se puede expresar el módulo de cualquier vector y el ángulo entre vectores por medio de los correspondientes productos escalares de vectores. Como el producto escalar de un vector por sí mismo es

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{a}| \cdot \cos(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{a}}) = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{a}| \cdot 1 = |\mathbf{a}|^2,$$

el módulo del vector vendrá expresado por

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle}. \quad (1.29)$$

Utilizando esta expresión, hallamos de la (1.28) que

$$\cos(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}}) = \frac{\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle}{|\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}|} = \frac{\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle}{\sqrt{\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle}\sqrt{\langle \mathbf{b}, \mathbf{b} \rangle}}. \quad (1.30)$$

La relación (1.30) sólo tendrá un valor determinado si $|\mathbf{a}| \neq 0$ y $|\mathbf{b}| \neq 0$. Pero en el espacio perceptible por los sentidos sólo el vector nulo tiene módulo igual a cero y carece de dirección determinada. Por consiguiente, para el vector nulo o la fórmula (1.30) conduce a la indeterminación

$$\cos(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{o}}) = \frac{\langle \mathbf{a}, \mathbf{o} \rangle}{|\mathbf{a}| \cdot 0} = \frac{0}{0}.$$

Las relaciones (1.29) y (1.30) no ofrecerían interés si el producto escalar de los vectores pudiera hallarse sólo por la fórmula (1.28), mediante los módulos conocidos de los vectores y el ángulo entre éstos. Pero partiendo de la definición de producto escalar dada por la fórmula (1.28) se puede demostrar que para cualesquiera vectores $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ de un espacio perceptible sensorialmente y para cualquier número real λ, son correctas las relaciones siguientes:

1ª. $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \langle \mathbf{b}, \mathbf{a} \rangle$, propiedad conmutativa;

2ª. $\langle \mathbf{a} + \mathbf{c}, \mathbf{b} \rangle = \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle + \langle \mathbf{c}, \mathbf{b} \rangle$, propiedad distributiva;

3ª. $\lambda\,(\mathbf{a},\ \mathbf{b}\rangle = \langle\lambda\mathbf{a},\ \mathbf{b}\rangle = \langle\mathbf{a},\ \lambda\mathbf{b}\rangle$, propiedad asociativa del producto escalar de los vectores respecto de la multiplicación por un número.

Estas propiedades dan la posibilidad de calcular el producto escalar de los vectores **a** y **b** sin recurrir a sus módulos y al ángulo $\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}}$. Si se conocen las descomposiciones de los vectores según la base del espacio:

$$\mathbf{a} = \alpha_1\mathbf{e}_1 + \alpha_2\mathbf{e}_2 + \alpha_3\mathbf{e}_3,$$
$$\mathbf{b} = \beta_1\mathbf{e}_1 + \beta_2\mathbf{e}_2 + \beta_3\mathbf{e}_3,$$

basándose en las propiedades 2ª y 3ª de la multiplicación escalar de vectores, se halla que

$$\langle\mathbf{a},\ \mathbf{b}\rangle = \langle(\alpha_1\mathbf{e}_1 + \alpha_2\mathbf{e}_2) + \alpha_3\mathbf{e}_3,\ \mathbf{b}\rangle =$$
$$= \langle\alpha_1\mathbf{e}_1 + \alpha_2\mathbf{e}_2,\ \mathbf{b}\rangle + \alpha_3\langle\mathbf{e}_3,\ \mathbf{b}\rangle =$$
$$= \alpha_1\langle\mathbf{e}_1,\ \mathbf{b}\rangle + \alpha_2\langle\mathbf{e}_2,\ \mathbf{b}\rangle + \alpha_3\langle\mathbf{e}_3,\ \mathbf{b}\rangle.$$

E introduciendo aquí la descomposición del vector **b** según la base, obtenemos en definitiva

$$\langle\mathbf{a},\ \mathbf{b}\rangle = \alpha_1\langle\mathbf{e}_1,\ \beta_1\mathbf{e}_1 + \beta_2\mathbf{e}_2 + \beta_3\mathbf{e}_3\rangle +$$
$$+ \alpha_2\langle\mathbf{e}_2,\ \mathbf{b}\rangle + \alpha_3\langle\mathbf{e}_3,\ \mathbf{b}\rangle =$$
$$= \alpha_1\beta_1\langle\mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_1\rangle + \alpha_1\beta_2\langle\mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_2\rangle +$$
$$+ \alpha_1\beta_3\langle\mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_3\rangle + \alpha_2\beta_1\langle\mathbf{e}_2,\ \mathbf{e}_1\rangle +$$
$$+ \alpha_2\beta_2\langle\mathbf{e}_2,\ \mathbf{e}_2\rangle + \alpha_2\beta_3\langle\mathbf{e}_2,\ \mathbf{e}_3\rangle +$$
$$+ \alpha_3\beta_1\langle\mathbf{e}_3,\ \mathbf{e}_1\rangle + \alpha_3\beta_2\langle\mathbf{e}_3,\ \mathbf{e}_2\rangle +$$
$$+ \alpha_3\beta_3\langle\mathbf{e}_3,\ \mathbf{e}_3\rangle. \qquad (1.31)$$

Como las coordenadas α_i y β_k $(i, k = 1, 2, 3)$ de los vectores **a** y **b** se dan, podemos hallar todos los productos $\alpha_i\beta_k$ en la expresión (1.31). Por lo tanto, para hallar el producto escalar $\langle\mathbf{a},\ \mathbf{b}\rangle$ sólo quedan por conocer los productos escalares $\langle\mathbf{e}_i,\ \mathbf{e}_k\rangle$ de los vectores básicos. Estos productos conviene escribirlos en forma de tabla (matriz)

$$\begin{pmatrix} \langle\mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_1\rangle & \langle\mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_2\rangle & \langle\mathbf{e}_1\ \mathbf{e}_3\rangle \\ \langle\mathbf{e}_2,\ \mathbf{e}_1\rangle & \langle\mathbf{e}_2,\ \mathbf{e}_2\rangle & \langle\mathbf{e}_2,\ \mathbf{e}_3\rangle \\ \langle\mathbf{e}_3,\ \mathbf{e}_1\rangle & \langle\mathbf{e}_3,\ \mathbf{e}_2\rangle & \langle\mathbf{e}_3,\ \mathbf{e}_3\rangle \end{pmatrix}. \qquad (1.32)$$

En virtud de la propiedad 1ª de la multiplicación escalar de vectores, en la tabla (1.32) se encuentran números iguales

$$\langle\mathbf{e}_2,\ \mathbf{e}_1\rangle = \langle\mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_2\rangle, \quad \langle\mathbf{e}_3,\ \mathbf{e}_1\rangle = \langle\mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_3\rangle,$$
$$\langle\mathbf{e}_3,\ \mathbf{e}_2\rangle = \langle\mathbf{e}_2,\ \mathbf{e}_3\rangle.$$

La tabla (1.32) contiene todas las características métricas de la base. Por los productos escalares indicados en ella se pueden hallar, valiéndose de las fórmulas (1.29) y (1.30), las longitudes de los vectores básicos y los ángulos entre ellos:

$$|\mathbf{e}_1| = \sqrt{\langle\mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_1\rangle}, \quad |\mathbf{e}_2| = \sqrt{\langle\mathbf{e}_2,\ \mathbf{e}_2\rangle},$$
$$|\mathbf{e}_3| = \sqrt{\langle\mathbf{e}_3,\ \mathbf{e}_3\rangle},$$
$$\cos\widehat{(\mathbf{e}_1\ \mathbf{e}_2)} = \frac{\langle\mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_2\rangle}{|\mathbf{e}_1|\cdot|\mathbf{e}_2|},$$
$$\cos\widehat{(\mathbf{e}_3,\ \mathbf{e}_1)} = \frac{\langle\mathbf{e}_3,\ \mathbf{e}_1\rangle}{|\mathbf{e}_3|\cdot|\mathbf{e}_1|},$$
$$\cos\widehat{(\mathbf{e}_2,\ \mathbf{e}_3)} = \frac{\langle\mathbf{e}_2,\ \mathbf{e}_3\rangle}{|\mathbf{e}_2|\cdot|\mathbf{e}_3|}.$$

La combinación de la tabla (1.32) con la fórmula (1.31) da la posibilidad de calcular los productos escalares de cualesquiera vectores, cuya descomposición según la base sea conocida. Lo mismo que el producto escalar $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$ se pueden calcular los productos escalares: $\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle$ y $\langle \mathbf{b}, \mathbf{b} \rangle$. Y, una vez conocidas estas magnitudes, se hallan por las fórmulas (1.29) y (1.30) las longitudes de los vectores **a** y **b** y el ángulo entre ellos. Aquí adquiere desarrollo el papel del sistema de vectores básico como base del espacio: mediante su descomposición según la base, cada vector y cada par de vectores adquiere de la base sus características métricas.

Desde el punto de vista de las percepciones sensoriales, las longitudes y los ángulos se presentan como contenido principal de las propiedades métricas del espacio. Pero, como pone de manifiesto el análisis teórico, la precisión de las propiedades métricas del espacio está relacionada con el hecho de que cada par de vectores tiene un producto escalar determinado. Entonces, ¿no convendría cambiar el punto de vista y, de acuerdo con la lógica del problema, ir no de la longitud y el ángulo al producto escalar, sino del producto escalar, como base profunda de las propiedades métricas, a la longitud y a los ángulos como manifestaciones de esas propiedades? En este caso las relaciones (1.29) y (1.30) actúan como definición teórica de la longitud y del ángulo por medio del producto escalar.

Pero, si tomamos el producto escalar como idea fundamental, nos vemos obligados a renunciar de su definición por la fórmula (1.28) (por medio de la longitud y el ángulo) y a dar otra definición axiomática. Elemento esencial de esta definición deben ser las propiedades 1ª, 2ª y 3ª, puesto que precisamente por medio de ellas se efectúa la relación entre las características métricas de los vectores. Partiendo de las longitudes y ángulos que nos da la experiencia, se podían deducir las propiedades 1ª, 2ª y 3ª de la definición de producto escalar de vectores. Pero ahora, con el enfoque deductivo, estas propiedades, como hallazgo fructuoso, hay que introducirlas en calidad de *axiomas* en la definición de producto escalar. No obstante, para que la definición axiomática de producto escalar no contradiga las propiedades métricas del espacio perceptible por los sentidos, a estos tres axiomas hay que agregarle otro más.

Esto es necesario porque en el espacio que perciben los sentidos sólo pueden encontrarse vectores cuyas longitudes se expresen por números reales. Este hecho se sentó automáticamente en el concepto de longitud tomado de la experiencia. Pero si definimos la longitud (módulo) de un vector cualquiera a por la fórmula (1.29), hay que prever que el producto escalar $\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle$

no pueda resultar negativo. Para eso se introduce el axioma

4°. $\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle > 0$, si a es un vector no nulo;
$\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle = 0$, si a es un vector nulo.

Ahora se puede enunciar ya la definición axiomática de la operación de multiplicar vectores escalarmente.

La multiplicación escalar de vectores consiste en que a cada par de vectores a y b se le asigna, de acuerdo con cierta regla, un número real determinado, llamado producto escalar de dichos vectores, que se designa por el símbolo $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$, con la particularidad de que esa regla satisface las cuatro condiciones (axiomas) siguientes, cualesquiera que sean los vectores a, b, c elegidos y el número real λ:

1°. $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \langle \mathbf{b}, \mathbf{a} \rangle$;
2°. $\langle \mathbf{a} + \mathbf{c}, \mathbf{b} \rangle = \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle + \langle \mathbf{c}, \mathbf{b} \rangle$;
3°. $\lambda \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \langle \lambda \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$;
4°. $\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle > 0$, si $\mathbf{a} \neq 0$;
$\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle = 0$, si $\mathbf{a} = \mathbf{o}$.

Las fórmulas (1.29) y (1.30) desempeñan el papel de eslabón de enlace entre la definición axiomática de producto escalar y la percepción sensorial de las propiedades métricas del espacio. Estas fórmulas, en la construcción teórica dada, también se convierten en axiomas (axiomas que definen los conceptos de longitud y de ángulo). La práctica confirma que estos axiomas son correctos.

Puede surgir la duda de si la fórmula (1.30) es capaz de determinar, con el enfoque axiomático, el ángulo entre vectores *cualesquiera* del espacio sensorialmente perceptible. Porque en ese espacio el coseno del ángulo no puede ser, en magnitud absoluta, mayor que la unidad, y entre los axiomas del producto escalar no se incluye la exigencia de que para dos vectores a y b cualesquiera se cumpla la condición

$$|\cos(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}})| = \frac{|\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle|}{|\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}|} \leqslant 1, \text{ o bien } |\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle| \leqslant |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}|. \quad (1.33)$$

Vamos a demostrar que los axiomas 1° — 4° son totalmente suficientes para que esa condición se cumpla. En virtud del axioma 4°, para dos vectores a y b cualesquiera y un número real λ, también cualquiera, es correcta la desigualdad

$$\langle \lambda \mathbf{a} - \mathbf{b}, \lambda \mathbf{a} - \mathbf{b} \rangle \geqslant 0.$$

Basándose en los axiomas 1°, 2° y 3°, esta desigualdad se transforma en la

$$\lambda^2 \langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle - \lambda \cdot 2 \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle + \langle \mathbf{b}, \mathbf{b} \rangle \geqslant 0. \quad (1.34)$$

La expresión que figura en el primer miembro de la desigualdad (1.34) representa un trinomio de segundo grado respecto de λ, en el cual el papel de coeficientes de la variable lo desempeñan los productos escalares: $\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle$, $2 \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$, $\langle \mathbf{b}, \mathbf{b} \rangle$. Como la desigualdad (1.34) se cumple para valores cualesquiera de λ, cualesquiera que sean los

vectores **a** y **b** que se elijan, el discriminante del trinomio de segundo grado no puede ser positivo:

$$4\langle \mathbf{a}, \mathbf{b}\rangle^2 - 4\langle \mathbf{a}, \mathbf{a}\rangle\langle \mathbf{b}, \mathbf{b}\rangle \leqslant 0,$$

o bien

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b}\rangle^2 \leqslant \langle \mathbf{a}, \mathbf{a}\rangle\langle \mathbf{b}, \mathbf{b}\rangle.$$

Sacando la raíz cuadrada de los dos miembros de la última desigualdad, se obtiene la (1.33):

$$|\langle \mathbf{a}, \mathbf{b}\rangle| \leqslant \sqrt{\langle \mathbf{a}, \mathbf{a}\rangle}\cdot\sqrt{\langle \mathbf{b}, \mathbf{b}\rangle}, \text{ o bien}$$

$$\frac{|\langle \mathbf{a}, \mathbf{b}\rangle|}{|\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{b}|} \leqslant 1,$$

que recibe el nombre de desigualdad de Cauchy—Buniakovski.

La regla por la cual a cada par de vectores se le asigna un número real determinado puede tener diversas formas concretas, pero en todo caso debe satisfacer las condiciones que se indican en la definición axiomática de la multiplicación escalar de vectores. En la exposición antes desarrollada esta regla se expresa en la fórmula (1.31) y en la tabla adjunta a ella (1.32) de los productos escalares de los vectores básicos. Pero ¿de dónde se toma esa tabla? Sus elementos no nos son dados directamente en las formas espaciales perceptibles sensorialmente, y sólo podemos hallarlas midiendo las longitudes de los vectores básicos y los ángulos entre ellos y haciendo después los cálculos por la fórmula (1.28). ¿No socava esta circunstancia la prioridad del producto escalar como medio de expresión de las propiedades métricas del espacio? Aquí conviene distinguir las relaciones objetivas, que existen en la naturaleza, de las posibilidades de su percepción por nosotros. El carácter concreto de los productos escalares de los vectores básicos es una realidad independiente de si podemos o no hallarlos y del procedimiento por el que los hallemos. En los problemas de carácter experimental empleamos las percepciones sensoriales como fuente de información del espacio.

En las investigaciones teóricas, en cambio, el matemático estudia los principios lógicos de construcción de los conjuntos y, de acuerdo con el carácter de estos problemas, asume el papel de creador de modelos de espacios. En este caso hay que tratar con abstracciones que en la naturaleza no existen de forma pura, pero que son, por así decirlo, semifabricados en el proceso de creación del modelo matemático adecuado al espacio real a diversos niveles de su percepción. Uno de esos objetos abstractos es el *espacio afín*. Este espacio se concibe como un conjunto vectorial de puntos, es decir, como un conjunto cuyos elementos son vectores y puntos, relacionados entre sí por determinadas reglas de correspondencia, a saber:

1) para cada punto A y para cada vector $\mathbf{x}$ existe un punto, y sólo uno, B tal, que $\overrightarrow{AB} = \mathbf{x}$;

2) Para tres puntos cualesquiera A, B, C es correcta la igualdad vectorial $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ [9, 10].

En el espacio afín se determinan las operaciones con vectores que satisfacen los axiomas $1^o - 8^o$ del espacio lineal, pero no se determina la multiplicación escalar de vectores. Por eso el espacio tridimensional afín tiene todas las propiedades lineales del espacio perceptible por los sentidos, pero está privado totalmente de propiedades métricas. En él no tiene sentido la comparación de la longitud de segmentos no paralelos y la medición de los ángulos entre ellos.

El espacio afín tridimensional es un modelo no terminado del espacio perceptible sensorialmente que sólo encarna las propiedades lineales de éste, conservando la estructura puntual. Tomando como base el espacio afín, el matemático puede crear una infinidad de variantes de modelos de espacio, dotados de las mismas propiedades métricas que el espacio que perciben los sentidos. Para eso basta postular que en el espacio afín se introduce la multiplicación escalar de vectores, que satisface los axiomas 1°—4° del producto escalar, y fijar, respetando estos axiomas, pero de un modo totalmente arbitrario en lo demás, los valores de los productos escalares de los vectores básicos (es decir, dar la tabla (1.32)). Un espacio afín en el cual se han introducido las propiedades métricas mediante la determinación de la multiplicación escalar de vectores, se llama *espacio euclídeo*. El espacio euclídeo tridimensional es el modelo matemático que total y exactamente expresa las propiedades geométricas del espacio que perciben los sentidos.

Una vez resuelto el problema de la simulación del espacio geométrico perceptible sensorialmente, el álgebra no se detiene, sino que sigue adelante y crea modelos de conjuntos con propiedades métricas, basados en los conjuntos lineales abstractos (espacios lineales). Por ejemplo, en el conjunto lineal de dimensión infinita de funciones de una variable $f_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots, \infty$, continuas en el intervalo $a \leqslant t \leqslant b$, se puede introducir la multiplicación escalar de los elementos del conjunto, asignando a dos funciones $f_i(t)$ y $f_k(t)$ cualesquiera de este conjunto un número real $\langle f_i(t), f_k(t) \rangle$ de acuerdo con la regla

$$\langle f_i(t), f_k(t) \rangle = \int_a^b f_i(t) \cdot f_k(t)\, dt.$$

Es fácil cerciorarse de que esta regla satisface los axiomas 1°—4° del producto escalar. Así, pues, un conjunto lineal de

funciones continuas se convierte en espacio euclídeo de dimensión infinita que encuentra aplicación en la teoría de las series de Fourier.

Vamos a dar la definición del espacio euclídeo *abstracto* (véase [8]).

Un espacio lineal se llama euclídeo si cumple las dos condiciones siguientes:

1. Existe una regla por medio de la cual a dos elementos a y b cualesquiera de este espacio se les asigna un número real, llamado producto escalar de dichos elementos, cuyo símbolo es $\langle a, b\rangle$.

II. La regla indicada cumple los cuatro axiomas siguientes:

1°. $\langle a, b\rangle = \langle b, a\rangle$;

2°. $\langle a, +c, b\rangle = \langle a, b\rangle + \langle c, b\rangle$;

3°. $\lambda\langle a, b\rangle = \langle \lambda a, b\rangle$;

4°. $\langle a, a\rangle > 0$, si a es un elemento no nulo,

$\langle a, a\rangle = 0$, si a es un elemento nulo.

Para terminar llamaremos la atención sobre el hecho de que el cálculo de los productos escalares de los vectores, de las longitudes de los vectores y de los ángulos entre ellos por las fórmulas (1.31), (1.29) y (1.30) se puede simplificar y facilitar mucho, si las características métricas de la base se eligen de una manera especial. La base debe tomarse de tal modo que la tabla de productos escalares de los elementos básicos contenga sólo ceros y unidades (donde no sean posibles ceros). Por ejemplo, la tabla (1.32), para la base de un espacio euclídeo tridimensional, toma la forma

$$\begin{pmatrix} \langle e_1, e_1\rangle & \langle e_1, e_2\rangle & \langle e_1, e_3\rangle \\ \langle e_2, e_1\rangle & \langle e_2, e_2\rangle & \langle e_2, e_3\rangle \\ \langle e_3, e_1\rangle & \langle e_3, e_2\rangle & \langle e_3, e_3\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (1.35)$$

Ninguno de los productos escalares de los vectores de igual símbolo $\langle e_1, e_1\rangle$, $\langle e_2, e_2\rangle$, $\langle e_3, e_3\rangle$ puede ser igual a cero, ya que por el axioma 4° eso sólo es posible para el vector nulo, y un vector nulo no puede formar parte de la base (sistema linealmente independiente). Para los productos escalares de vectores de símbolos distintos, la igualdad a cero no está prohibida por los axiomas 1°—4°. Calculemos las longitudes de los vectores básicos y los ángulos entre ellos en la base caracterizada por la tabla (1.35):

$$|e_1| = \sqrt{\langle e_1, e_1\rangle} = \sqrt{1} = 1,$$

$$|e_2| = \sqrt{\langle e_2, e_2\rangle} = 1, \quad |e_3| = \sqrt{\langle e_3, e_3\rangle} = 1$$

$$\frac{\cos(\widehat{e_1, e_2})}{|e_1| \cdot |e_2|} = \frac{0}{1 \cdot 1} = 0,$$

$$\cos(\widehat{e_3, e_1}) = 0, \quad \cos(\widehat{e_2, e_3}) = 0,$$

$$\widehat{e_1, e_2} = \pi/2, \quad \widehat{e_3, e_1} = \pi/2, \quad \widehat{e_3, e_1} = \pi/2.$$

Cada vector básico, en el caso que consideramos, es unitario, y dos cualesquiera de ellos son perpendiculares entre sí (ortogonales). Esa base recibe el nombre de *ortogonalizada* u *ortonormal*.

Si la base del espacio euclídeo tridimensional es ortonormal, en la fórmula (1.31) del producto escalar de los vectores arbitrarios a y b todos los términos que contienen productos escalares de vectores básicos de símbolos distintos se anulan (véase (1.35)), y los productos de vectores básicos de igual símbolo, iguales a la unidad, pueden no indicarse en la escritura. Entonces la fórmula (1.31) toma la forma más simple

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3. \quad (1.36)$$

Aplicando la fórmula (1.36) a la multiplicación escalar de un vector por sí mismo, se obtiene

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle = \alpha_1\alpha_1 + \alpha_2\alpha_2 + \alpha_3\alpha_3 = \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2. \quad (1.37)$$

Por eso, cuando se emplea la base ortonormal, las longitudes de los vectores y el ángulo entre ellos se expresan mediante las coordenadas de los vectores por las fórmulas siguientes:

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle} = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2},$$
$$|\mathbf{b}| = \sqrt{\beta_1^2 + \beta_1^2 + \beta_3^2} \quad (1.38)$$

$$\cos(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}}) = \frac{\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle}{|\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}|} =$$

$$= \frac{\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3}{\sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2} \cdot \sqrt{\beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2}}. \quad (1.3)$$

CAPITULO 2

Plano seudoeuclídeo

> «El desarrollo de las matemáticas modernas se ve dificultado no por lo difícil que es acostumbrarse a las nuevas ideas, sino por lo difícil que resulta renunciar a las antiguas ... Una nueva teoría es a menudo difícil de comprender porque es característico del hombre conservar la forma de pensar ligada a la teoría antigua».
>
> *W. W. Sawyer* [7]

En el primer capítulo se han expuesto las ideas matemáticas sobre cuya base se puede empezar a hablar del espacio de Minkowski. El universo de Minkowski es tetradimensional, pero el aumento de la dimensión no es la principal dificultad para asimilar esta idea. Es mucho más difícil salvar la barrera de la singularidad de las propiedades métricas del espacio de Minkowski. A primera vista parecen fantásticas. Y si, incluso las matemáticas garantizan su no contradicción lógica, dejan la impresión de que se trata de una abstracción matemática que no tiene lugar en la naturaleza. La reputación de irrealidad de la métrica del universo de Minkowski está íntimamente relacionada con la conservación, como supervivencia, de la idea de irrealidad de los números complejos, a la cual contribuye la misma terminología (números «imaginarios»). Por esto es preciso realizar una excursión por esa región.

§ 7. Historia de los números que "no existen en realidad"

A lo largo de la historia de la ciencia, el concepto de número se ha desarrollado, adquiriendo cada vez más comunidad. Y hoy toda persona que recibe enseñanza matemática tiene que repetir sucintamente este proceso de ampliación del concepto de número.

En su concepción más simple, el número es la cantidad de objetos. A esta representación corresponde el concepto de número natural (entrero y positivo). El conjunto N de los números naturales es cerrado respecto de las operaciones de adición y multiplicación. Esto quiere decir que, al sumar o multiplicar cualesquiera números naturales, se obtienen necesariamente como resultado números naturales, es decir, que no se salen del conjunto N.

La operación de dividir números naturales puede conducir a una fracción que no sea número natural. El reconocimiento de las fracciones de los números no ocasionó dificultades ni siquiera en los tiempos antiguos. Esta salida fuera del conjunto N obligó a ampliar el concepto de número. Se empezó a llamar número no sólo a la cantidad de objetos, sino también a la relación entre las cantidades.

Incomparablemente más despacio y con mayor dificultad se formó en la ciencia el concepto de número negativo. Al encontrarse con la necesidad de restar de un número menor otro mayor, los matemáticos de la antigüedad interpretaban la solución como la falta de cierta cantidad, pero esa misma cantidad la expresaban por medio de un número positivo. Ellos no disponían de un número con el cual fuera posible expresar, por ejemplo, el resultado de la operación $2-5 = \ldots$ Y cuando obtenían como solución de una ecuación una raíz negativa, la desechaban simplemente como «inadmisible». En Europa, los matemáticos del siglo XVI, aunque utilizaban a veces números negativos, les daban los nombres de «falsos», «confusos», «menores que la nada», etc. [11]. Sólo en el siglo XVII, después de haber introducido Descartes el uso de los sistemas de coordenadas y establecido la correspondencia mutuamente unívoca (biunívoca) entre los números y los puntos del eje de coordenadas, se afirmó definitivamente en matemáticas la idea de la equivalencia de los números positivos y negativos. Tomó forma el concepto de *número racional* como relación entre dos números enteros m y n cualesquiera. El conjunto Q de los números racionales es cerrado respecto de las operaciones de adición, sustracción, multiplicación y división.

De esta forma, la necesidad de aumentar el conjunto de operaciones que pueden realizarse con los números condujo a la generalización del concepto de número. Al tropezar con problemas cuya solución no podía ser expresada por un número en su

concepto estrecho anterior, los matemáticos convenían en ampliar el conjunto de los objetos merecedores del nombre de número, y daban una definición, nueva y de mayor contenido, de número, que abarcaba los números que antes se consideraban inexistentes o, por lo menos, deficientes. La importancia objetiva del concepto, nuevo y más amplio, de número consiste en que con su ayuda se consigue expresar, de un modo más completo y lógicamente no contradictorio, las relaciones que existen en la naturaleza.

Los puntos de un eje de coordenadas correspondientes a los números racionales están densamente dispuestos. Esto significa que, por muy pequeño que sea un segmento de eje que tomemos, en él habrá una infinidad de puntos que sirven de imagen de números racionales. Al mismo tiempo, en cualquier segmento del eje de coordenadas hay una infinidad de puntos que no son imágenes de números racionales. Un ejemplo clásico de esto, que sorprendió a los matemáticos de la antigüedad, es el problema de la comparación de las longitudes de los lados de un cuadrado con su diagonal.

Tomemos sobre una recta una unidad de medida y construyamos un cuadrado $OABC$ cuyo lado sea igual a la unidad tomada. Llevando la longitud de la diagonal OB sobre el eje de coordenadas, se obtiene el segmento OD (fig. 10). Su longitud, evidentemente, deberá ser igual a la relación entre las longitudes de los segmentos OB y OA:

$$\frac{|OB|}{|OA|} = \frac{|OD|}{1} = |OD|.$$

Sin embargo, esta relación entre los segmentos no puede ser expresada por ninguna relación entre números enteros, es decir,

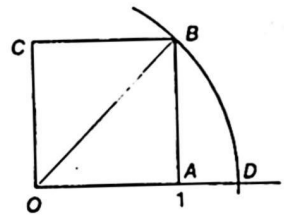


Fig. 10

por ningún número racional. En efecto, por el teorema de Pitágoras, tenemos

$$|OD|^2 = |OB|^2 = |OA|^2 + |AB|^2 = 1 + 1 = 2,$$

$$|OD| = \sqrt{2}.$$

Si se supone que existen unos números enteros m y n tales, que la relación entre ellos es igual a la longitud del segmento OD, expresada en unidades $|OA|$:

$$\sqrt{2} = m/n,$$

se llega a una contradicción. Podemos considerar que los números m y n no tienen factores comunes (si tuvieran un factor

común podrían simplificarse por él y luego considerar el quebrado como irreducible). Además, $|n| \neq 1$, es decir $\sqrt{2}$ no es un número entero, puesto que de la desigualdad $1 < 2 < 4$ se sigue que $1 < \sqrt{2} < 2$. Elevando al cuadrado la igualdad $\sqrt{2} = m/n$, obtendríamos $2 = m^2/n^2$. Pero los números m^2 y n^2 no tienen factores comunes, porque no los tienen los números m y n, y $n^2 > 1$. Por lo tanto, m^2/n^2 es una fracción que no puede simplificarse ni igualarse al número entero 2. Hemos demostrado, pues, que no existe número racional alguno cuyo cuadrado sea igual a 2.

Si se considera que los números sólo pueden ser racionales, la operación de extraer la raíz cuadrada del número 2 no puede realizarse y el símbolo $\sqrt{2}$ hay que reconocer que no tiene sentido. Representa algo «del más allá» que no tiene lugar en el conjunto de los números (racionales). Pero este punto de vista no está de acuerdo con el contenido geométrico del problema examinado, ya que el símbolo $\sqrt{2}$, en este caso, expresa una magnitud geométrica completamente real: la longitud de la diagonal del cuadrado cuyo lado se toma como unidad. Entonces el punto D (véase la fig. 10), que se encuentra del punto O a la distancia de esta longitud, existe en realidad en la recta de coordenadas OA. La posición de dicho punto se puede indicar aproximadamente con la exactitud que se quiera por medio de los números racionales correspondientes a los límites de un segmento, tan pequeño como se desee, que contenga al punto D.

La circunstancia que sigue tiene no poca importancia. Supongamos que $\sqrt{2}$ es sólo un símbolo al cual no corresponde un número (en el sentido que le da la definición de número racional). Pero en una serie de casos las operaciones con estos objetos «del más allá», realizadas de acuerdo con las reglas de las operaciones con números «de verdad», pueden conducir a un resultado que es completamente «del más acá», es decir, un número racional. Por ejemplo,

$$(\sqrt{3} - \sqrt{2})\ (\sqrt{3} + \sqrt{2}) = \sqrt{(3)^2} - \\ -(\sqrt{2})^2 = 3 - 2 = 1.$$

Razonamientos como éste hicieron que los matemáticos se fueran inclinando a pensar que los símbolos $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, etc., corresponden a ciertos números reales, aunque no puedan ser representados en forma de relación entre números enteros. El asombro ante estos números «inexpresables» se reflejó en el nombre que recibieron, de números *irracionales*, es decir, números que no se pueden interpretar de un modo racional (de *ratio*, perteneciente a la razón). Precisamente en contraposición con los números irracionales, los números que se pueden expresar en forma de relación entre números enteros fueron llamados *racionales*.

A finales del siglo XIX fue creada una teoría que explica los números racionales e irracionales desde un mismo punto de vista (teoría de las cortaduras de Dedekind) [12]. La unión de los conjuntos de los números racionales e irracionales se llama conjunto de los números *reales* R. A cada número real corresponde un punto determinado en el eje de coordenadas, y cada punto del eje de coordenadas corresponde a un número real determinado.

Los problemas del establecimiento del concepto de número real son aleccionadores para la comprensión de la idea, aún más amplia, del número llamado complejo. La introducción de los números complejos se debe a la necesidad de expresar los resultados de determinadas operaciones con números reales, que no son números reales. No existe número real alguno cuyo cuadrado sea un número negativo. Por eso, en el conjunto de los números reales R no figuran las raíces cuadradas (y, por consiguiente, las raíces de cualquier grado par) de los números reales negativos. Como el cuadrado de todo número real y es un número no negativo y^2, el símbolo $(-y^2)$ conviene utilizarlo para designar cualquier número real negativo. El problema de la extracción de la raíz cuadrada del número $(-y^2)$ se reduce al problema de extraer la raíz cuadrada de la unidad negativa:

$$\sqrt{-y^2} = \sqrt{(-1)\,y^2} = \sqrt{-1}\cdot y.$$

A Leonard Euler se debe la costumbre de designar el símbolo $\sqrt{-1}$ por la letra i (inicial de la palabra *imaginario*):

$$\sqrt{-1} = i. \qquad (2.1)$$

Este símbolo se llama *unidad imaginaria*. La raíz cuadrada de un número real negativo arbitrario se designa por

$$\sqrt{-y^2} = iy, \qquad (2.2)$$

y recibe el nombre de «número imaginario y».

En esta denominación se reflejó la idea de que la raíz cuadrada de un número negativo no es un número en el sentido «real» y de que si con el símbolo $\sqrt{-y^2} = iy$ se relaciona un concepto cualquiera de número, será el de un número «irreal», «inventado», «inexistente en la realidad». La «invención», en este caso, se encuentra más lejos de la «realidad», confirmada por la apariencia exterior, que la invención de los números irracionales. A cada número irracional, por lo menos, le corresponde un punto determinado en el eje de coordenadas, mientras que para un número imaginario no se consigue hallar interpretación geométrica o aplicación alguna. Las longitudes de cualesquiera segmentos en el espacio que perciben los sentidos se expresan por medio de números reales y no existe segmento alguno que para ser expresado requiera un número imaginario.

Sin embargo, los números imaginarios tienen un rasgo importante común con los números irracionales, el de que en algunos casos las operaciones con el símbolo iy, que no expresa un número real, conducen a números reales. Estas operaciones son, en primer lugar, las de elevación al cuadrado de cualquier número imaginario:

$$i^2 = (\sqrt{-1})^2 = -1,$$
$$(iy)^2 = (\sqrt{-y^2})^2 = -y^2. \qquad (2.3)$$

Y expresiones más complejas, formadas con magnitudes imaginarias, se pueden reducir a funciones del argumento real que toman valor real. Por ejemplo, si teniendo en cuenta (2.3) se suman dos series infinitas de potencias

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iy)^n}{n!} = 1 + iy + \frac{(iy)^2}{2!} + \frac{(iy)^3}{3!} + \frac{(iy)^4}{4!} + \ldots =$$
$$= 1 + iy - \frac{y^2}{2!} - i\,\frac{y^3}{3!} + \frac{y^4}{4!} + \ldots,$$
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-iy)^n}{n!} = 1 + (-iy) + \frac{(-iy)^2}{2!} + \frac{(-iy)^3}{3!} +$$
$$+ \frac{(-iy)^4}{4!} + \ldots = 1 - iy - \frac{y^2}{2!} + i\,\frac{y^3}{3!} + \frac{y^4}{4!} + \ldots,$$

se obtiene una serie formada solamente por términos reales que convergen hacia la función $2 \cos y$:

$$2\left(1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} - \ldots\right) = 2\cos y.$$

A medida que profundizaba la investigación de los números imaginarios y de las funciones de argumento imaginario, fue poniéndose de manifiesto el importante papel que aquéllos desempeñan en la solución de problemas teóricos de matemáticas fundamentales y aplicadas. Cada vez con mayor insistencia se iba abriendo camino la convicción de que era contranatural la actitud respecto del número imaginario, al considerarlo como un objeto matemático irreal, «del más allá». Incluso en problemas sencillos se pueden encontrar indicios de que el número imaginario, en unidad orgánica con el número real, representa cierto aspecto más profundo y perfecto del concepto de número.

Vamos a examinar el problema de la existencia de soluciones de algunas ecuaciones cuadráticas. Si en la ecuación

$$ax^2 + bx + c = 0$$

el discriminante $D = b^2 - 4ac$ es negativo, en el conjunto de los números reales R no se encuentran las raíces de esta ecuación. En el caso general tampoco las hay entre los números imaginarios, y sólo una combinación específica de números reales e imaginarios permite dar la expresión de la raíz.

Por ejemplo, aplicando la fórmula para resolver las ecuaciones cuadráticas

$$x_1 = -\frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a},$$

$$x_2 = -\frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

a la ecuación

$$x^2 - 4x + 13 = 0, \qquad (2.4)$$

obtenemos

$$x_1 = 2 + 3i,\ x_2 = 2 - 3i.$$

Sustituyendo cualquiera de estas expresiones en la ecuación (2.4) y realizando las operaciones en la forma ordinaria, teniendo en cuenta (2.3), llegamos a las igualdades numéricas correctas:

$$(2 + 3i)^2 - 4(2 + 3i) + 13 = 4 + 2 \cdot 2 \cdot 3i + (3i)^2) - 8 - 4 \cdot 3i + 13 = 4 + 12i - 9 - 8 - 12i + 13 = 17 - 17 = 0,$$

$$(2 - 3i)^2 - 4(2 - 3i) + 13 = 4 - 12i - 9 - 8 + 12i + 13 = 0.$$

Por lo tanto, hay razón para poder considerar que las expresiones $2 + 3i$ y $2 - 3i$ son las raíces de la ecuación (2.4), aunque no sea fácil comprender lo que significan.

La operación de la suma se emplea en matemáticas con objetos de muy diversas clases: números reales, vectores, matrices, operadores, etc., pero en cada caso los papeles de los sumandos y de la suma los desempeñan elementos de igual naturaleza. Con las raíces de la ecuación (2.4) no ocurre eso. Por el sentido de la fórmula general de las raíces de la ecuación cuadrática, cada raíz es la suma de dos términos. Pero si el discriminante es negativo, el segundo término es un número imaginario, mientras que el primero es un número real. No está claro cómo se pueden sumar objetos tan distintos y qué representa su suma, la cual no es ni un número real ni un número imaginario. Por otra parte, precisamente esta suma incomprensible es la que da la llave para resolver el problema. En primer lugar, hay que tomarla en consideración, puesto que expresa las raíces de la ecuación cuadrática. En segundo lugar, une los dos tipos de números, reales e imaginarios. Por lo tanto, ¿no será necesario considerar los números reales e imaginarios como partes componentes de un objeto numérico más complejo? Separadas una de otra, cada una de ellas tiene una aplicación limitada, pero formando un ente único constituyen un concepto más cabal de número. Si en un número *complejo* de este tipo la parte imaginaria es igual a cero, el número se considera real, y si es nula la parte real, el número complejo se considera como imaginario. Cuando se suman números complejos hay que sumar por separado las partes

reales y las imaginarias. La costumbre de designar por el factor $i = \sqrt{-1}$ la parte imaginaria tiene carácter histórico. Con esta interpretación del problema se obtiene, en vez de la adición sin sentido de un número real y otro imaginario, la suma de dos números complejos (objetos de igual naturaleza) y, como total de ella, un número también complejo:

$$(2 + 0 \cdot i) + (0 + 3i) = (2 + 0) + \\ + (0 + 3)\, i = 2 + 3i.$$

En la escritura de un número complejo el signo más (o menos) delante de la parte imaginaria no significa que haya que sumarla (o restarla) a (o de) la parte real. Se trata simplemente del signo de la parte imaginaria, la cual puede ser positiva o negativa. Para deshacerse de la ilusión de que las partes real e imaginaria del número complejo se suman, dichas partes pueden escribirse separadas por un punto y coma. También se puede prescindir del factor simbólico i delante de la parte imaginaria. De indicio suficiente para distinguir la parte real de la imaginaria sirve su colocación en la escritura del número complejo: en primer lugar va la parte real, y en segundo, la imaginaria:

$$x + iy = (x;\ y). \qquad (2.5)$$

Precisamente esa es la forma de escritura adoptada en la teoría moderna de los números complejos, aunque en la práctica de los cálculos se conserva también la forma algebraica histórica $x + iy$. Si es necesario indicar un número complejo como objeto único, sin distinguir en él la parte real y la imaginaria, se utiliza la designación monolítera

$$(x;\ y) = z. \qquad (2.6)$$

Con estas designaciones vamos a escribir la *regla de la adición de números complejos*:

$$z_1 + z_2 = (x_1;\ y_1) + (x_2;\ y_2) = \\ = (x_1 + x_2;\ y_1 + y_2). \qquad (2.7)$$

Para cerciorarnos de que los números complejos $2 + 3i$ y $2 - 3i$ eran las raíces de la ecuación cuadrática (2.4), multiplicamos por sí mismos estos números (es decir, los elevábamos al cuadrado), siguiendo la regla ordinaria de la multiplicación de polinomios, teniendo en cuenta que $i^2 = -1$. En la forma general esto se hace así:

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = x_1x_2 + \\ + i^2y_1y_2 + i(x_1y_2 + y_1x_2) = (x_1x_2 - \\ - y_1y_2) + i(x_1y_2 + y_1x_2).$$

Pero si los números complejos se escriben no en la forma algebraica, sino en la forma de pares de números ordenados, la *regla de la multiplicación* toma la forma

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1;\ y_1)(x_2;\ y_2) = (x_1x_2 - \\ - y_1y_2;\ x_1y_2 + y_1x_2). \qquad (2.8)$$

Esta expresión es fácil de recordar enunciándola como sigue: la primera componente del producto es igual a la diferencia de los productos de los términos *antecedentes* x_1x_2 de los factores complejos, escritos uno al lado del otro, por sus términos *consecuentes* y_1y_2, y la segunda componente, igual a la suma de los productos de los términos *extremos* x_1y_2 por los *medios* y_1x_2.

Hemos descrito el modo de enfocar el concepto de número complejo y las operaciones aritméticas con números complejos como conjetura que surge de analizar el problema particular de la resolución de la ecuación cuadrática con discriminante negativo. Pero ha sido demostrado el teorema general (teorema de Frobenius) acerca de que «los números complejos dan la única ampliación posible del campo de los números reales, conservando las propiedades algebraicas» [13]. En la definición de los números complejos se incluye orgánicamente la definición de las operaciones con ellos: los números complejos z son pares ordenados de números reales $(x;\ y)$ que se suman según la regla (2.7) y se multiplican entre sí por la regla (2.8). El conjunto de los números complejos se designa con la letra C.

Las operaciones de sustracción y división de números complejos se definen como operaciones inversas a las de adición y multiplicación. Se llama diferencia entre los números z_1 y z_2 un número complejo z que satisface la relación $z + z_2 = z_1$. De donde se sigue que

$$z = (x;\ y) = z_1 - z_2 = (x_1;\ y_1) - (x_2;\ y_2) = (x_1 - x_2;\ y_1 - y_2). \qquad (2.9)$$

Se da el nombre de cociente de la división de z_1 por z_2, siendo $z_2 \neq (0;\ 0)$, al número complejo z que satisface la relación $z \cdot z_2 = z_1$. De esta condición no es difícil deducir que

$$z(x;\ y) = \frac{(x_1;\ y_1)}{(x_2;\ y_2)} = \left(\frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2};\ \frac{y_1x_2 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}\right). \qquad (2.10)$$

Partiendo de las definiciones de los números complejos y de las operaciones con ellos, nos cercioramos de que los números complejos cuya segunda componente es nula, se comportan en las operaciones lo mismo que los números reales:

$$(x_1;\ 0) + (x_2;\ 0) = (x_1 + x_2;\ 0),$$

$$(x_1;\ 0)(x_2;\ 0) = (x_1x_2 - 0 \cdot 0;\ x_1 \cdot 0 + 0 \cdot x_2) = (x_1x_2;\ 0),$$

$$\frac{(x_1;\ 0)}{(x_2;\ 0)} = \left(\frac{x_1x_2 + 0 \cdot 0}{x_2^2 + 0^2};\ \frac{0 \cdot x_2 - x_1 \cdot 0}{x_2^2 + 0^2}\right) = \left(\frac{x_1x_2}{x_2^2};\ 0\right) = \left(\frac{x_1}{x_2};\ 0\right).$$

Los resultados de todas estas operaciones son números complejos en los cuales la segunda componente también es nula. Omi-

tiéndola en todas partes se obtienen números reales ordinarios, de una sola componente, con los cuales se opera como de costumbre. Por eso, un número complejo cuya segunda componente sea nula puede llamarse, para abreviar, número real (sin olvidar la convencionalidad de esta expresión).

En el conjunto de los números complejos hay uno cuyo cuadrado es igual al número real —1, es decir, al número complejo (— 1; 0). De acuerdo con la regla de la multiplicación (2.8), tenemos

$$(0;\ 1)\ (0;\ 1) = (0\cdot 0 - 1\cdot 1;\ 0\cdot 1 + 1\cdot 0) = (-1;\ 0).$$

Por lo tanto, el número complejo (0; 1) es el objeto matemático que se ocultaba bajo el símbolo $\sqrt{-1} = i$. Todo número complejo en el cual sea nula la primera componente, al ser elevado al cuadrado da un número real negativo:

$$(0;\ y)\ (0;\ y) = (0\cdot 0 - y\cdot y;\ 0\cdot y + y\cdot 0) = (-y^2;\ 0).$$

Por consiguiente, el número complejo $(0; y)$ es el objeto matemático que se oculta bajo el símbolo $\sqrt{-y^2}$. Por eso, todo número complejo cuya primera componente sea nula puede llamarse, para abreviar, número imaginario (sin olvidar la convencionalidad de esta expresión). Todo número complejo de este tipo puede representarse en forma de producto del número real respectivo por la unidad imaginaria:

$$(y;\ 0)\ (0;\ 1) = (y\cdot 0 - 0\cdot 1;\ y\cdot 1 + 0\cdot 0) = (0;\ y) = yi.$$

Finalmente, las operaciones con los números complejos confirman que el producto de un número real por un número imaginario es un número imaginario:

$$(u;\ 0)\ (0;\ y) = (u\cdot 0 - 0\cdot y;\ uy + 0\cdot 0) = (0;\ uy) = u\ (iy) = i\ (uy).$$

Hasta que en las matemáticas no fue comprendido el papel del número complejo como un concepto más general y profundo de número, se consideró que el símbolo $\sqrt{-y^2}$ no correspondía a ningún número «de verdad», que era un número «imaginado». La inercia del pensamiento y el hecho de que hasta principios del siglo XX no se descubrieran en la naturaleza relaciones que requisieran números complejos para ser representadas, hicieron pensar que estos objetos eran un artificio matemático capaz, aunque parezca extraño, de conducir a resultados reales correctos. En nuestros días, las representaciones teóricas generales, la utilización de los números complejos para expresar leyes físicas fundamentales (en la mecánica cuántica y en la teoría de la relatividad) y para resolver muchos problemas prácticos, fundamentan

convincentemente el pleno valor real de los números complejos. En estas condiciones, el término de «número imaginario» se puede conservar como tributo a la tradición histórica, como nombre acostumbrado de un determinado subconjunto de números complejos (con la primera componente nula), pero es absolutamente inadmisible interpretar este nombre como designación convencional de un objeto inventado que no tiene lugar en la realidad objetiva. A propósito de esto citaremos unas palabras del conocido algebrista soviético A. G. Kúrosh: «... para las matemáticas modernas, a diferencia, por ejemplo, de las matemáticas del siglo XVIII, el concepto de número complejo no tiene nada de misterioso, estos números son tan poco «imaginarios» como los números negativos o los irracionales» [14].

En relación con el hecho de que el conjunto C de los números complejos tiene más potencia que el conjunto R de los números reales y permanece cerrado respecto de mayor número de operaciones, en el conjunto C resultan determinadas algunas funciones que carecen de sentido en el conjunto R. Ante todo, en el conjunto C están determinadas las raíces de cualquier grado entero de todos los números complejos (en particular, de los reales y de los imaginarios). Con esto está relacionado uno de los resultados teóricos más importantes, el llamado *teorema fundamental del álgebra*: todo polinomio de grado $n \geqslant 1$, con cualesquiera coeficientes numéricos, tiene n raíces. Si esto no fuera así, el conjunto de los números complejos tendría que ser ampliado. En el conjunto de los números reales quedan sin determinación los logaritmos de los números negativos. En tanto que en el conjunto C vienen determinados los logaritmos tanto de los números reales negativos como de los complejos, cualesquiera que sean (excepto el de cero). Las principales funciones elementales (potencial, exponencial, logarítmica, trigonométricas y trigonométricas inversas) tienen sentido en el conjunto de los números complejos C. Eso quiere decir que el argumento de las funciones nombradas puede ser un número complejo y las funciones mismas toman valores complejos (en casos particulares, reales o imaginarios).

El conocido matemático contemporáneo E. Wigner escribe en el artículo *The Unreasonable Effectiveness of Mathematics in the Natural Sciences* [15]; «Para una mente inexperta los números complejos no parecen naturales y ordinarios, y los resultados de las observaciones físicas no pueden de por sí contener números complejos... En nuestra experiencia diaria nada nos obliga a introducir estos números. Por otra parte, si a un matemático se le pide que os explique su interés por los números complejos, él, no sin enfado, os indicará los magníficos teoremas concernientes a las ecuaciones algebraicas, a las series de potencias y, en

general, a las funciones analíticas, cuya demostración ha sido posible en virtud de la introducción de los números complejos. Los matemáticos nunca dejarán de interesarse por este logro de su genio...».

Sería demasiado ecléctica en nuestro tiempo la opinión según la cual los números complejos, a pesar de todas sus ventajas en el campo de las matemáticas, son una abstracción exenta de existencia real fuera de la conciencia de los matemáticos. En el siglo pasado las ciencias naturales y, en primer lugar, la física, operaban con un nivel de conocimientos de los fenómenos de la naturaleza tal, que para la definición matemática de éstos bastaban los números reales. Pero un análisis más profundo, llevado a cabo por la física moderna, pone de manifiesto en la naturaleza relaciones que se expresan en el lenguaje de los números complejos. Eso es precisamente lo que antes faltaba para poder comprender la realidad de los números complejos. En el artículo antes citado [15] E. Wigner advierte que «la utilización de los números complejos en la mecánica cuántica no es un truco de cálculo de la matemática aplicada; esos números forman parte esencial de la formulación de las leyes fundamentales de dicha mecánica». Otra dirección de la física del siglo XX —la teoría de la relatividad— tampoco puede prescindir de los números complejos. De esto trataremos más adelante.

§ 8. Espacios lineales de números complejos

Con la introducción de los números complejos podemos ampliar el concepto de espacio lineal. En el § 4 llamamos espacio lineal a un conjunto en el cual se determinan dos operaciones lineales: la adición de elementos del conjunto y la multiplicación de los elementos del conjunto por números *reales*. Ahora podemos considerar un conjunto en el cual la segunda operación lineal es la multiplicación de los elementos del conjunto por números *complejos*, satisfaciendo los ocho axiomas del espacio lineal. Estos conjuntos se llaman espacios lineales complejos o espacios lineales *sobre el campo de los números complejos*. A diferencia de ellos, los conjuntos lineales en los cuales la segunda operación es la multiplicación de los elementos por números reales, reciben el nombre de espacios lineales reales o espacios lineales *sobre el campo de los números reales*.

El conjunto de los números complejos es un espacio lineal complejo, ya que los elementos de ese conjunto se pueden sumar unos a otros y multiplicarse por números complejos. Partiendo de las definiciones (2.7) y (2.8) de estas operaciones, no es difícil demostrar que en ellas se cumplen los ocho axiomas del espacio lineal. El espacio lineal de números complejos sobre el campo de los números complejos tiene dimensión igual a la unidad. En efecto, to-

mando como base un elemento no nulo w (el número complejo $w = (u; v) \neq (0; 0)$), podemos representar cualquier número complejo $z = (x; y)$ en forma de la combinación lineal $z = \alpha w$, en la que $\alpha = \frac{z}{w} = \frac{(x; y)}{(u; v)}$ es el coeficiente complejo.

Para nuestros fines tiene especial importancia el hecho de que exista la posibilidad de considerar el conjunto de los números complejos como espacio lineal *sobre el campo de los números reales*. La operación de multiplicar el número complejo $z = (x; y)$ por un número real λ se define como un caso particular del producto (2.8) de números complejos:

$$\lambda z = \lambda (x; y) = (\lambda; 0) (x; y) = (\lambda x - 0 \cdot y; \lambda y + 0 \cdot x) = (\lambda x; \lambda y). \quad (2.11)$$

Para esta operación y para la de la suma de números compejos (2.7) son válidos los ocho axiomas del espacio lineal. Por consiguiente, existe también el *espacio lineal real de números complejos*. Convengamos en llamar a este espacio C_R. Para determinar la dimensión del espacio C_R demostraremos que en él se puede encontrar un sistema linealmente independiente formado por dos elementos. Como primer elemento tomamos el número complejo $w_1 = (1; 0)$, y como segundo, el $w_2 = (0; 1)$. Escribamos la combinación lineal de estos elementos con unos coeficientes reales arbitrarios λ_1 y λ_2:

$$\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 = \lambda_1 (1; 0) + \lambda_2 (0; 1) = (\lambda_1; 0) + (0; \lambda_2) = (\lambda_1; \lambda_2).$$

Es evidente que esta combinación *sólo* puede ser igual al elemento nulo (0; 0) en el caso trivial, es decir, cuando $\lambda_1 = 0$ y $\lambda_2 = 0$. O sea, el sistema de los números complejos w_1, w_2 es linealmente independiente. Al mismo tiempo, cualquier número complejo $z = (x; y)$ es una combinación lineal de los elementos w_1 y w_2:

$$z = (x; y) = (x; 0) + (0; y) = x (1; 0) + y (0; 1) = xw_1 + yw_2.$$

Por lo tanto, los elementos w_1 y w_2 forman la base del espacio lineal de números complejos sobre el campo de los números reales. Y como el número de elementos que forman la base es igual a la dimensión del espacio, tenemos que el espacio C_R es bidimensional.

§ 9. Espacio bidimensional seudoeuclídeo

La operación de multiplicar números complejos (2.8) asigna a cada par de números complejos z_1 y z_2 un número complejo

$$z = z_1 z_2 = (x_1; y_1) (x_2; y_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2; x_1 y_2 + y_1 x_2).$$

Pero la primera componente del número complejo —el producto— es un número real

$$x_1x_2 - y_1y_2 = (x_1x_2 - y_1y_2;\ 0).$$

De este modo, la operación (2.8) contiene una regla según la cual a cada par de números complejos corresponde un número real determinado. Al parecer, aquí se trata de una multiplicación escalar de elementos del espacio lineal C_R. Por eso vamos a utilizar el símbolo del producto escalar (paréntesis angulares):

$$\langle z_1,\ z_2\rangle = \langle (x_1;\ y_1),\ (x_2;\ y_2)\rangle = \\ = x_1x_2 - y_1y_2. \qquad (2.12)$$

Estrictamente hablando, no podemos considerar la relación (2.12) como definición del producto escalar de números complejos (elementos del espacio lineal C_R) mientras no nos cercioremos de que esta operación satisface los axiomas del producto escalar (véase la definición del espacio euclídeo abstracto en el § 6). Hagamos la comprobación:

1°. $\langle z_1,\ z_2\rangle = \langle (x_1;\ y_1),\ (x_2;\ y_2)\rangle = x_1x_2 - y_1y_2 = x_2x_1 - y_2y_1 = \langle (x_2;\ y_2),\ (x_1;\ y_1)\rangle = \langle z_2,\ z_1\rangle$;

2°. $\langle z_1 + z_3,\ z_2\rangle = \langle (x_1 + x_3;\ y_1 + y_3),\ (x_2;\ y_2)\rangle = (x_1 + x_3)\,x_2 - (y_1 + y_3)\,y_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + (x_3x_2 - y_3y_2) = \langle (x_1;\ y_1),\ (x_2;\ y_2)\rangle + \langle (x_3;\ y_3),\ (x_2;\ y_2)\rangle = \langle z_1;\ z_2\rangle + \langle z_3;\ z_2\rangle$;

3°. para cualquier número real λ es correcto

$$\lambda\,(z_1,\ z_2\rangle = \lambda\,(x_1x_2 - y_1y_2) = (\lambda x_1)\,x_2 - (\lambda y_1)\,y_2 = \langle (\lambda x_1;\ \lambda y_1),\ (x_2;\ y_2)\rangle = \langle (\lambda z_1),\ z_2\rangle.$$

En cuanto al 4° axioma, resulta que se cumple *no con todos* los números complejos. El producto escalar del elemento $z = (x;\ y)$ por sí mismo:

$$\langle z,\ z\rangle = \langle (x;\ y),\ (x;\ y)\rangle = x^2 - y^2 \qquad (2.13)$$

puede ser tanto positivo como negativo, en dependencia de la relación entre los valores absolutos de las componentes x e y. Si

$$|\,x\,| < |\,y\,|,$$

obtendremos

$$\langle z,\ z\rangle = x^2 - y^2 < 0$$

y el 4° axioma quedará infringido.

Se plantea la pregunta: ¿por esa infracción, acaso debemos considerar infundada la definición de multiplicación escalar de números complejos dada por la fórmula (2.12), o debe modificarse en este caso el concepto de producto escalar de los elementos del espacio lineal renunciando al axioma 4°? La renuncia del cuarto axioma representa un cambio no muy esencial en las propiedades algebraicas de la opera-

ción. Como antes, ésta consiste en que a cada par de elementos del espacio lineal se le asigna un número real. Como antes, el orden en que se suceden los elementos en el par es indiferente (propiedad conmutativa, 1ª). Como antes se cumple la propiedad distributiva, 2ª, y la asociativa, 3ª (con respecto a la multiplicación por un número real). El hecho de que tenga las propiedades 2ª y 3ª da la posibilidad de calcular los productos escalares de cualquier elemento mediante su descomposición según la base del espacio lineal (véase (1.31)). La conservación de estas propiedades decisivas nos inclina a considerar la fórmula (2.12) como definición de la multiplicación escalar de los elementos del espacio lineal C_R.

Claro está que la renuncia al axioma 4° implica un cambio importante de las propiedades métricas. Ya no podrá esperarse que la métrica de un espacio lineal C_R, en el cual la multiplicación escalar de los elementos queda determinada por la regla (2.12), resulte igual a la métrica de un plano percibido por los sentidos (también espacio lineal bidimensional). Para subrayar esa diferencia e indicar, al mismo tiempo, la semejanza del aparato analítico de las operaciones, debida a la comunidad de los axiomas 1°, 2° y 3°, se dice que las propiedades métricas del espacio lineal C_R son *seudoeuclídeas*. En el caso general, las propiedades métricas de un espacio lineal se llaman *seudoeuclídeas* si han sido determinadas por medio de la multiplicación escalar de los elementos del espacio que satisface los axiomas 1°, 2° y 3°, pero que no satisface el 4°. El prefijo griego «seudo» significa «falso» o «supuesto». El espacio lineal de números complejos sobre el campo de los números reales es seudoeuclídeo, es decir, «parecido al euclídeo», pero distinto de él. En contraposición a la métrica seudoeuclídea, las propiedades métricas determinadas con la participación de los cuatro axiomas del producto escalar, se llaman *euclídeas propias*. El espacio que perciben los sentidos es euclídeo propio. El espacio euclídeo propio y el espacio seudoeuclídeo se consideran como dos variedades del espacio euclídeo. Pero en aquellos casos en que la métrica seudoeuclídea no entra claramente en el campo visual de los problemas de que se trata, se admite, para abreviar, el empleo del término «espacio euclídeo» como sinónimo de espacio euclídeo propio.

§ 10. Interpretación geométrica de un conjunto de números complejos

Al analizar las propiedades métricas del espacio percibido por los sentidos procuramos encontrar la expresión más abstracta de su esencia y la hallamos en el concepto de producto escalar de vectores. Eso nos permitió hacer una generalización de largo alcance: considerar la posibilidad de la

existencia de propiedades métricas incluso en conjuntos lineales sin sentido geométrico. Así surgió el concepto de espacio euclídeo abstracto (véase al final del § 6). Desde la altura de esa abstracción pudo verse que el conjunto de números complejos, en calidad de espacio lineal sobre el campo de números reales, tiene propiedades métricas y, además, muy originales. La originalidad consiste en el incumplimiento del cuarto axioma, el cual impone la condición de que el producto escalar de cualquier elemento de un espacio lineal por sí mismo sea un número real *no negativo*. Pero eso sólo es la expresión abstracta en extremo de la originalidad. Para ver con toda claridad lo que se oculta tras ella hay que retornar al nivel en que las propiedades métricas se expresan concretamente en términos de longitudes y ángulos.

Desde el punto de vista formal, este paso es fácil, basta convenir que a cada elemento a del espacio lineal C_R se le asigna el módulo $|a|$ (longitud) de acuerdo con la fórmula (1.29):

$$|a| = \sqrt{\langle a, a\rangle}$$

y a cada par de elementos $a, b \in C_R$ se le asigna, de acuerdo con la fórmula (1.30), el número

$$\cos(\widehat{a, b}) = \frac{\langle a, b\rangle}{\sqrt{\langle a, a\rangle}\cdot\sqrt{\langle b, b\rangle}},$$

llamado coseno del ángulo entre estos elementos. Pero de por sí los elementos del espacio C_R son números complejos carentes de sentido geométrico. ¿Cómo puede hablarse de «longitud» de un número complejo o de «ángulo» entre números?

Pero reflexionemos sobre el sentido de la arraigada costumbre de caracterizar la longitud de un segmento por un número real. De base de esa caracterización sirve la interpretación geométrica de los números reales: a cada número real se le asigna, por la conocida regla, un punto determinado de una recta y a cada punto de esta recta le corresponde un número real determinado. En matemáticas esto se llama *aplicación* biunívoca de un conjunto de números reales en un conjunto de puntos de una recta. Esta representación la expresamos de un modo más de acuerdo con el aparato matemático, si decimos aplicación o representación de un conjunto de números reales en un conjunto de radio vectores colineares (ya que los puntos se indican por medio de sus radio vectores). Al número 1 se le asigna el radio vector unitario r^0 de sentido positivo, al (-1), el radio vector unitario opuesto y así sucesivamente. Subrayamos que el conjunto de los números reales encaja en la definición de espacio lineal real abstracto de dimensión 1.

Como un conjunto de números complejos sobre un campo de números reales es un espacio lineal bidimensional, por analogía

con los números reales conviene considerar su aplicación biunívoca en un espacio lineal bidimensional de radio vectores, es decir, en un plano. Construiremos esta aplicación como sigue. En un plano se toma un sistema de coordenadas cartesianas arbitrario (cuya base sea $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ y el polo O) y a cada número complejo $z = (x; y)$ se le asigna un radio vector $\mathbf{r}$:

$$z = (x; y) \leftrightarrow \mathbf{r} = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 = \overline{OM} \quad (2.14)$$

que indica el punto M de coordenadas $(x; y)$. En este caso a la representación de la suma de los números complejos

$$z_1 + z_2 = (x_1; y_1) + (x_2; y_2) = \\ = (x_1 + x_2; y_1 + y_2)$$

le corresonderá la suma de radio vectores

$$\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 = (x_1\mathbf{e}_1 + y_1\mathbf{e}_2) + (x_2\mathbf{e}_1 + y_2\mathbf{e}_2) = \\ = (x_1 + x_2)\,\mathbf{e}_1 + (y_1 + y_2)\,\mathbf{e}_2$$

y al producto del número complejo $z = (x; y)$ por el número real λ (véase (2.11)):

$$\lambda z = \lambda\,(x; y) = (\lambda x; \lambda y)$$

corresponderá el producto del radio vector $\mathbf{r}$ por el mismo número:

$$\lambda\mathbf{r} = \lambda\,(x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2) = (\lambda x)\,\mathbf{e}_1 + (\lambda y)\,\mathbf{e}_2.$$

Es decir, no sólo hemos aplicado los números complejos en puntos del plano, sino que también hemos representado las operaciones lineales con los números complejos en forma de operaciones lineales con los radio vectores de los puntos imágenes. En virtud de esto, todas las propiedades lineales del espacio de los números complejos han obtenido una expresión clara en forma de las propiedades lineales del plano. En álgebra la aplicación biunívoca de un espacio lineal en otro, en la cual tiene lugar esta «conservación» de las operaciones lineales, recibe el nombre de *isomorfismo*, ya que estos espacios lineales tienen la misma estructura (forma), es decir, son isomorfos.

La interpretación geométrica de los números complejos valiéndose del isomorfismo (2.14) se utiliza mucho en la teoría de las funciones de variable compleja. En este caso el plano, cuyos puntos se consideran imágenes de los números complejos, se llama *plano complejo*. De hecho el concepto de plano complejo se basa solamente en la igualdad de las propiedades *lineales* del plano y del espacio lineal $\mathbf{C}_R$. Si pudiéramos hacer, representar o percibir por medio de los órganos sensoriales un plano que sólo tuviera propiedades lineales y careciera de propiedades métricas, es decir, un plano afín (véase el § 6), éste serviría perfectamente de representación geométrica de los números complejos que hemos descrito.

Pero en realidad utilizamos para este fin un plano perceptible por los sentidos, el cual conlleva la métrica euclídea propia, y sus propiedades métricas no es costumbre

separarlas del concepto de plano complejo. En la aplicación de las propiedades métricas euclídeas propias del plano complejo se basa un procedimiento especial de representación de los números complejos, llamado forma trigonométrica. En el plano se toma un sistema de coordenadas *ortonormalizado OXY* (fig. 11). La distancia ρ des-

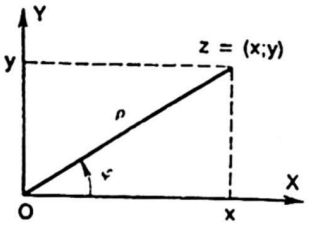


Fig. 11

de el origen de coordenadas O hasta el punto $z = (x; y)$, determinada por la regla de la métrica euclídea propia, recibe el nombre de *módulo del número complejo*

$$| z | = \rho = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

El ángulo φ entre el eje OX y el radio vector del punto $(x; y)$ se denomina *argumento del número complejo*. Sustituyendo las relaciones

$$x = \rho \cdot \cos \varphi, \; y = \rho \cdot \operatorname{sen} \varphi$$

en la forma algebraica $x + iy$ del número complejo, se obtiene la forma trigonométrica

$$z = (x; y) = x + iy = \rho \cdot \cos \varphi + i \cdot \operatorname{sen} \varphi = \rho (\cos \varphi + i \cdot \operatorname{sen} \varphi).$$

La forma trigonométrica es muy conveniente, en particular, para las operaciones de multiplicación y división de números complejos y para su elevación a potencia y extracción de raíces. En esto no vamos a detenernos con más detalle.

Para nosotros el mayor interés lo tiene el hecho de que las propiedades métricas euclídeas propias del plano complejo *no ioincidan* con las propiedades métricas seudoeuclídeas del espacio lineal $\mathbf{C}_R$. La interpretación geométrica de los números complejos sería más exacta y profunda si aplicáramos los números complejos en un plano con propiedades métricas *seudoeuclídeas*. Pero, ¿qué plano es ese? Las percepciones sensoriales, y en primer lugar las visuales, no nos dicen nada de ese objeto geométrico. Todos los planos perceptibles por los sentidos tienen propiedades métricas euclídeas propias, y, desde el punto de vista de las percepciones sensoriales, otros planos no existen. No obstante, nosotros tenemos ya necesidad *teórica* del plano seudoeuclídeo para dar una interpretación geométrica no sólo a las relaciones lineales, sino también a las métricas, entre los elementos del espacio lineal $\mathbf{C}_R$ de los números complejos sobre el campo de los números

reales. Para empezar podemos considerar dicho plano como una construcción geométrica imaginaria, como una fantasía matemática, pero, subrayamos, una fantasía no infundada. En cuanto aprendamos a orientarnos bien en la geometría del plano seudoeuclídeo, podremos pasar al problema de la existencia real de estos planos en la naturaleza.

Describir analíticamente un plano seudoeuclídeo no es difícil. Es éste un espacio afín bidimensional, en el cual se introducen las mismas propiedades métricas que tiene el espacio lineal $\mathbf{C}_R$. La igualdad de las propiedades métricas de ambos espacios se consigue porque los productos escalares de los elementos, que se corresponden unos a otros, en virtud del isomorfismo (2.14), son iguales. Así, si z_1 y z_2 son ciertos números complejos arbitrarios a los cuales corresponden en la aplicación (2.14) los radios vectores $\mathbf{r}_1$ y $\mathbf{r}_2$:

$$z_1 = (x_1;\ y_1) \leftrightarrow \mathbf{r}_1 = x_1\mathbf{e}_1 + y_1\mathbf{e}_2,$$
$$z_2 = (x_2;\ y_2) \leftrightarrow \mathbf{r}_2 = x_2\mathbf{e}_1 + y_2\mathbf{e}_2,$$

debe cumplirse la igualdad

$$\langle z_1,\ z_2\rangle = \langle \mathbf{r}_1,\ \mathbf{r}_2\rangle. \qquad (2.15)$$

Esta condición se cumplirá, si el producto escalar de los vectores se determina con la fórmula

$$\langle \mathbf{r}_1,\ \mathbf{r}_2\rangle = \langle x_1\mathbf{e}_1 + y_1\mathbf{e}_2,\ x_2\mathbf{e}_1 + y_2\mathbf{e}_2\rangle = x_1x_2 - y_1y_2 \qquad (2.16)$$

(véase (2.12)). En términos algebraicos, la igualdad (2.15) en combinación con la aplicación (2.14) condiciona el isomorfismo de los dos espacios *euclídeos* que se consideran, es decir, la igualdad no sólo de las propiedades lineales, sino también de las métricas del espacio $\mathbf{C}_R$ de los números complejos y del plano seudoeuclídeo.

Es interesante comparar la utilización de la fórmula (2.16) a la base del plano seudoeuclídeo con el empleo de la fórmula (2.12) a la base del espacio $\mathbf{C}_R$. Escribiendo la descomposición de cada uno de los vectores $\mathbf{e}_1$ y $\mathbf{e}_2$ según la base $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ del plano seudoeuclídeo

$$\mathbf{e}_1 = 1\cdot\mathbf{e}_1 + 0\cdot\mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},$$
$$\mathbf{e}_2 = 0\cdot\mathbf{e}_1 + 1\cdot\mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \qquad (2.17)$$

obtenemos las coordenadas de los vectores. De aquí se ve que, en virtud de la aplicación (2.14), a los vectores $\mathbf{e}_1$ y $\mathbf{e}_2$ corresponden en el espacio $\mathbf{C}_R$ los números complejos w_1 y w_2:

$$w_1 = (1;\ 0) \leftrightarrow \mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},$$
$$w_2 = (0;\ 1) \leftrightarrow \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}.$$

Los números w_1 y w_2 pueden servir de base al espacio C_R, como se muestra al final del § 8. Por la fórmula (2.12) hallamos los productos escalares de los números complejos básicos:

$$\langle w_1,\ w_1\rangle = \langle (1;\ 0),\ (1;\ 0)\rangle = 1\cdot 1 - 0\cdot 0 = 1,$$

$$\langle w_1,\ w_2\rangle = \langle (1;\ 0),\ (0;\ 1)\rangle = 1\cdot 0 - 0\cdot 1 = 0 = \langle w_2,\ w_1\rangle,$$

$$\langle w_2,\ w_2\rangle = \langle (0;\ 1),\ (0;\ 1)\rangle = 0\cdot 0 - 1\cdot 1 = -1$$

y los escribimos en forma de tabla

$$\begin{pmatrix} \langle w_1,\ w_1\rangle & \langle w_1,\ w_2\rangle \\ \langle w_2,\ w_1\rangle & \langle w_2,\ w_2\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \qquad (2.18)$$

Como los elementos de esta tabla sólo son ceros y unos, la base w_1, w_2 del espacio C_R merece el nombre de ortonormalizada (véase (1.35)). La presencia de la unidad *negativa* en la tabla (2.18) expresa el carácter seudoeuclídeo de la métrica del espacio C_R (es decir, el incumplimiento del 4° axioma del producto escalar).

Empleando la fórmula (2.16) a las descomposiciones (2.17), hallamos los productos escalares de los vectores básicos del plano seudoeuclídeo:

$$\langle \mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_1\rangle = 1\cdot 1 - 0\cdot 0 = 1,$$

$$\langle \mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_2\rangle = 1\cdot 0 - 0\cdot 1 = 0 = \langle \mathbf{e}_2,\ \mathbf{e}_1\rangle,$$

$$\langle \mathbf{e}_2,\ \mathbf{e}_1\rangle = 0\cdot 0 - 1\cdot 1 = -1.$$

La tabla de los productos escalares de estos vectores

$$\begin{pmatrix} \langle \mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_1\rangle & \langle \mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_2\rangle \\ \langle \mathbf{e}_2,\ \mathbf{e}_1\rangle & \langle \mathbf{e}_2,\ \mathbf{e}_2\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad (2.19)$$

coincide con la tabla (2.18) y también revela el carácter ortonormalizado de la base del plano seudoeuclídeo tomada. Valiéndonos de esta tabla podemos calcular el producto escalar de cualesquiera vectores **a** y **b** dados por la descomposición según la base $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$:

$$\mathbf{a} = \alpha_1\mathbf{e}_1 + \alpha_2\mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{b} = \beta_1\mathbf{e}_1 + \beta_2\mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix}.$$

En efecto, usando los axiomas 1°, 2° y 3°, con los cuales se determina la multiplicación escalar de los elementos del espacio seudoeuclídeo, obtenemos

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{a},\ \mathbf{b}\rangle &= \langle \alpha_1\mathbf{e}_1 + \alpha_2\mathbf{e}_2,\ \beta_1\mathbf{e}_1 + \beta_2\mathbf{e}_2\rangle = \\ &= \alpha_1\beta_1\langle \mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_1\rangle + \alpha_1\beta_2\langle \mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_2\rangle + \\ &+ \alpha_2\beta_1\langle \mathbf{e}_2,\ \mathbf{e}_1\rangle + \alpha_2\beta_2\langle \mathbf{e}_2,\ \mathbf{e}_2\rangle = \\ &= \alpha_1\beta_1\cdot 1 + \alpha_1\beta_2\cdot 0 + \alpha_2\beta_1\cdot 0 + \\ &+ \alpha_2\beta_2\cdot(-1) = \alpha_1\beta_1 - \alpha_2\beta_2. \qquad (2.20 \end{aligned}$$

Como es natural, esta fórmula coincide con la (2.16). De esta forma, la representación de las propiedades métricas del plano seudoeuclídeo por medio de la tabla (2.19)

equivale a su construcción a imagen de la métrica del espacio lineal C_R de los números complejos valiéndose de la fórmula (2.16).

Empleando la definición (1.29) de la longitud de un vector, hallamos, partiendo de (2.19), las longitudes de los vectores e_1 y e_2:

$$|e_1| = \sqrt{\langle e_1, e_1\rangle} = \sqrt{1} = 1,$$
$$|e_2| = \sqrt{\langle e_2, e_2\rangle} = \sqrt{-1} = i.$$

El hecho de que la longitud del vector e_2 se exprese por un número imaginario no nos parecerá demasiado extraño, ya que en el plano seudoeuclídeo vemos una profunda interpretación geométrica de un conjunto de números complejos, y en el conjunto de estos números no es, ni mucho menos, extraño o inadmisible un número imaginario. La anulación del producto escalar $\langle e_1, e_2\rangle$ expresa cierta singularidad de la posición mutua de los vectores e_1 y e_2 en el plano seudoeuclídeo. Para indicar esta singularidad se utiliza un término, tomado del campo de las relaciones métricas euclídeas propias. Allí la igualdad a cero del producto escalar de dos vectores no nulos indica que el ángulo entre ellos se expresa por el número $\pi/2$, es decir, que el ángulo es recto. Estos vectores se dice que son mutuamente ortogonales o perpendiculares. Como el concepto de producto escalar de los elementos del espacio lineal ha servido de base a amplias generalizaciones, en matemáticas se ha arraigado la costumbre de llamar ortogonales a cualesquiera elementos cuyo producto escalar sea igual a cero. En este sentido generalizado el término se aparta totalmente de su sentido inicial. En el plano seudoeuclídeo para los vectores, cuyo producto escalar es nulo, la magnitud del ángulo, como se demostrará más adelante, jamás quedará determinada. Sin embargo, esos vectores se llaman ortogonales. Nosotros preferimos llamarlos perpendiculares.

Está claro que todos los matices de las relaciones métricas en el plano seudoeuclídeo se expresan en fórmulas matemáticas que nos servirán de apoyo principal en los razonamientos geométricos. Pero es muy de desear el animar las representaciones abstractas con imágenes claras. Como comprendemos que estas imágenes claras se basan inevitablemente en las propiedades métricas euclídeas propias del espacio perceptible por los sentidos y que, por lo tanto, no pueden servir de representación adecuada de las relaciones métricas seudoeuclídeas, nos vemos obligados a recurrir a imágines convencionales. Convencionalidades, aunque de otro tipo, empleamos a menudo en la representación del espacio. Por ejemplo, dibujamos los mapas de la superficie esférica de la Tierra en hojas de papel planas o representamos en un cuadro plano un espacio tridimensional (pinturas, fotografías), sin que nos preocupe el que las relaciones métri-

cas e incluso lineales aparezcan ante nosotros deformadas: las rectas paralelas convergen en la perspectiva, las perpendiculares entre sí se representan formando ángulos agudos u obtusos, las grandes distancias, por cortos segmentos y las cortas, por largos. Cuando miramos un dibujo plano de objetos tridimensionales, la experiencia multifacética de las percepciones sensoriales, de un modo casi insensible para nuestra conciencia, hace el desciframiento, poniendo en lugar de las imágenes convencionales las representaciones correctas de los objetos. Por eso en un buen cuadro no nos damos cuenta de las convencionalidades y parece que vemos el mundo real. Pero como las relaciones métricas seudoeuclídeas nunca han sido percibidas por nuestros órganos sensoriales, la imagen convencional de esas relaciones no sólo no le recuerdan nada a nuestra conciencia, sino que contradicen todas las representaciones geométricas a que estamos acostumbrados y, por lo tanto, tienen que ser acompañadas de explicaciones, semejantes a las que se hacen a un mal dibujo: «esto es un león, y no un perro».

A la formación de la idea del plano seudoeuclídeo ayuda la circunstancia de que sus propiedades *lineales* coinciden con las mismas del plano euclídeo propio y pueden ser reproducidas en una imagen sin deformaciones. Ante todo, el mismo hecho de que un determinado conjunto de puntos pertenezca a un plano es una propiedad li-

neal del espacio. Por eso está justificada, por así decirlo, la idea «externa» del plano seudoeuclídeo como una superficie plana ordinaria (por ejemplo, la superficie de un vidrio de espejo) que mirada desde un borde se proyecta en una línea recta. Las relaciones lineales *dentro* del plano seudoeuclídeo, a saber, la pertenencia de determinados puntos del plano a una recta, el paralelismo y no paralelismo de las rectas, la relación entre las longitudes de los segmentos paralelos, podemos figurárnoslas claramente, ya que coinciden con las relaciones del mismo tipo en un plano perceptible por los sentidos. Representando el plano seudoeuclídeo sobre el plano euclídeo propio de la figura sólo deformamos las relaciones métricas, representándolas convencionalmente, pero esa convencionalidad no será arbitraria. La someteremos a una ley rigurosa si, al describir la posición mutua de los puntos y las líneas en el plano seudoeuclídeo, dados por las ecuaciones, construimos siempre en el dibujo las imágenes euclídeas *propias* correspondientes a dichas ecuaciones.

Pero antes hay que convenir en cómo vamos a representar en el dibujo las características métricas de la *base* del plano seudoeuclídeo. Es natural subrayar, como primer paso, la mutua perpendicularidad (en el sentido seudoeuclídeo) de los vectores básicos e_1 y e_2, representándolos en el dibujo perpendiculares entre sí (fig. 12). El he-

cho de que la longitud del vector $\mathbf{e}_2$ sea igual a la unidad *imaginaria* no puede encontrar expresión geométrica adecuada en el dibujo, ya que en un plano euclídeo propio

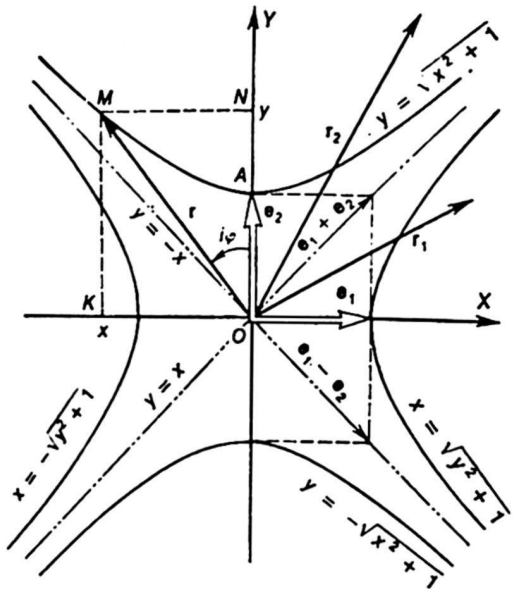


Fig. 12

no puede haber vectores de longitud imaginaria. Por eso hay que representar el vector $\mathbf{e}_2$ en forma de un vector ordinario de longitud real, señalando también especialmente esta convencionalidad en el dibujo. Aunque las longitudes de los vectores $\mathbf{e}_1$ y $\mathbf{e}_2$ se expresan con números de distinto carácter, en cada caso este número es la

unidad, real o imaginaria, respectivamente. Ésa es la razón por la cual en la fig. 12 se representa el vector $\mathbf{e}_2$, como unitario, con la misma longitud que el vector $\mathbf{e}_1$. El punto O en la fig. 12 es el polo del plano seudoeuclídeo, y los rayos OX y OY, los ejes de abscisas y ordenadas, respectivamente. Construyendo el sistema de coordenadas en el plano seudoeuclídeo y su imagen convencional sobre el plano euclídeo propio del dibujo, conseguimos poder acompañar con ilustraciones la descripción de las propiedades métricas del espacio seudoeuclídeo.

§ 11. Medida de longitudes en el plano seudoeuclídeo

Como las propiedades métricas del plano seudoeuclídeo no nos las dan las percepciones sensoriales, no tenemos más remedio que definir el concepto de longitud de un vector analíticamente, por medio de la fórmula general (1.29):

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle},$$

y el coseno del ángulo entre vectores, por la fórmula (1.30):

$$\cos(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}}) = \frac{\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle}{\sqrt{\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle} \cdot \sqrt{\langle \mathbf{b}, \mathbf{b} \rangle}}.$$

Si un radio vector arbitrario $\mathbf{r}$ viene dado en el plano seudoeuclídeo por la des-

composición según la base ortonormalizada (caracterizada por la tabla de los productos escalares (2.19)):

$$\mathbf{r} = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2, \qquad (2.21)$$

de acuerdo con (2.16) y (2.20) la longitud de ese radio vector será

$$|\mathbf{r}| = \sqrt{\langle \mathbf{r}, \mathbf{r} \rangle} = \sqrt{x^2 - y^2}. \qquad (2.22)$$

Si $x^2 > y^2$, la longitud $|\mathbf{r}|$ se expresará por un número real; si $x^2 < y^2$, la longitud $|\mathbf{r}|$ se expresará por un número imaginario, y si $x^2 = y^2$, la longitud $|\mathbf{r}|$ será nula.

En un espacio con propiedades euclídeas propias sólo puede tener la longitud igual a cero un vector nulo (de acuerdo con el 4° axioma del producto escalar). Todas las coordenadas de un vector nulo, respecto de una base cualquiera, son necesariamente iguales a cero (combinación lineal trivial de los vectores básicos). Pero en un plano seudoeuclídeo pueden tener longitud igual a cero vectores no nulos. En particular, el vector no nulo (2.21) puede tener longitud nula si sus coordenadas $x \neq 0$ e $y \neq 0$ satisfacen la condición

$$x^2 = y^2. \qquad (2.23)$$

Este radio vector se dice que es *isótropo*.

La conciencia, educada únicamente en las representaciones geométricas perceptibles por los sentidos, no se conforma con el

concepto de vector isótropo, lo rechaza como absurdo. En este caso es inútil buscar un análogo evidente, ya que en el espacio euclídeo propio no existen vectores isótropos. No obstante, aplicando el principio antes indicado de la representación convencional de las relaciones métricas seudoeuclídeas (véase el final del § 10), podemos con toda seguridad construir las *imágenes* de los vectores isótropos sobre un plano euclídeo propio (fig. 12). La condición de isotropía (2.23) se reduce a dos ecuaciones lineales:

$$y = x, \quad y = -x. \qquad (2.24)$$

Sobre el plano euclídeo propio, en el sistema de coordenadas ortonormalizado, a las ecuaciones (2.24) corresponden ciertas rectas, a saber, las bisectrices a los ángulos entre los ejes de coordenadas. Como la pertenencia de los puntos a una recta es una propiedad lineal del espacio y las propiedades lineales de los planos euclídeo propio y seudoeuclídeo coinciden, los puntos cuyas coordenadas satisfacen a una de las ecuaciones (2.24) se encuentran en la recta correspondiente y en el plano seudoeuclídeo. Estas rectas se llaman *isótropas*. Cada punto de una recta isótropa que pase por el polo O, se encontrará de éste a una distancia igual a cero. Eso significa que *la distancia entre dos puntos cualesquiera de una recta isótropa es nula.*

En el plano seudoeuclídeo todo vector

$$q = x_1 e_1 + x_2 e_2,$$

cuyas coordenadas satisfagan la condición

$$x_1^2 = x_2^2,$$

será un vector isótropo. Esta condición se realiza en uno de los dos casos siguientes:

$$\text{si } x_2 = x_1, \text{ y si } x_2 = -x_1.$$

En el primer caso se obtiene el vector

$$q^+ = x_1 e_1 + x_1 e_2 = x_1 (e_1 + e_2),$$

y en el segundo, el vector

$$q^- = x_1 e_1 - x_1 e_2 = x_1 (e_1 - e_2).$$

Consideremos los vectores

$$q_0^+ = e_1 + e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad q_0^- = e_1 - e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}. \tag{2.25}$$

El vector q^+ está relacionado con el vector q_0^+ por la operación lineal de la multiplicación por un número real:

$$q^+ = x_1 (e_1 + e_2) = x_1 q_0^+.$$

Los vectores q_0^+ y q^+ son colineares, y en el sentido de las relaciones lineales puede decirse que la longitud del vector isótropo q^+ es $|x_1|$ veces mayor que la longitud del vector isótropo q_0^+. Por lo tanto, el vector

q_0^+ puede tomarse como unidad de medida de todos los vectores isótropos colineares a él, es decir, como vector unitario (versor) de la dirección isótropa dada. Pero en el sentido de las relaciones métricas, las longitudes de todos los vectores isótropos son iguales a cero. En particular,

$$|q_0^+| = \sqrt{\langle q_0^+, q_0^+ \rangle} = \sqrt{1^2 - 1^2} = 0,$$

lo cual no permite considerar como unitario al vector q_0^+.

Lo importante aquí es comprender que se trata no de una contradicción lógica, sino de un caso notable de oposición de las propiedades métricas del espacio a sus propiedades lineales. Las relaciones métricas establecen la conmensurabilidad de los vectores no paralelos, que linealmente no son conmensurables. La longitud de un vector en el sentido métrico y la longitud de un vector en el sentido lineal, son dos conceptos *distintos*, y estas dos medidas sólo son aplicables a los vectores paralelos. Ambas resultan ser coincidentes para cualesquiera vectores paralelos en el espacio euclídeo propio y para los vectores no isótropos en el espacio seudoeuclídeo. Sea, por ejemplo, a un vector no isótropo en un plano seudoeuclídeo:

$$a = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2, \ \alpha_1^2 - \alpha_2^2 \neq 0.$$

Entonces el vector

$$b = \lambda a = (\lambda \alpha_1) e_1 + (\lambda \alpha_2) e_2,$$

colinear del vector a, tiene, en el sentido de las relaciones lineales, una longitud $|\lambda|$ veces mayor que el vector a. Lo mismo será la relación de sus longitudes en el sentido métrico:

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{\langle \mathbf{a}, \mathbf{a}\rangle} = \sqrt{\alpha_1^2 - \alpha_2^2} \neq 0,$$

$$|\mathbf{b}| = \sqrt{\langle \mathbf{b}, \mathbf{b}\rangle} = \sqrt{\langle \lambda\mathbf{a}, \lambda\mathbf{a}\rangle} = \sqrt{\lambda^2 \langle \mathbf{a}, \mathbf{a}\rangle} =$$

$$= |\lambda| \cdot \sqrt{\langle \mathbf{a}, \mathbf{a}\rangle} = |\lambda| \cdot |\mathbf{a}|, \quad \frac{|\mathbf{b}|}{|\mathbf{a}|} = |\lambda|.$$

En cuanto se refiere a los vectores *isótropos* colineares, para ellos tiene un valor determinado la relación de las longitudes en el sentido lineal: el vector $\mathbf{q}^+ = \varkappa_1 \mathbf{q}_0^+$ es $|\varkappa_1|$ veces más largo que el vector $\mathbf{q}_0^+$, pero la relación de las longitudes métricas se vuelve indeterminada. En efecto, debido a la anulación de la longitud métrica de los vectores isótropos

$$|\mathbf{q}_0^+| = \sqrt{\langle \mathbf{q}_0^+, \mathbf{q}_0^+\rangle} = \sqrt{\langle \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2\rangle} =$$

$$= \sqrt{1^2 - 1^2} = 0,$$

$$|\mathbf{q}^+| = \sqrt{\langle \mathbf{q}^+, \mathbf{q}^+\rangle} = \sqrt{\langle \varkappa_1 \mathbf{q}_0^+, \varkappa_1 \mathbf{q}_0^+\rangle} =$$

$$= \sqrt{\varkappa_1^2 \langle \mathbf{q}_0^+, \mathbf{q}_0^+\rangle} = |\varkappa_1| \cdot \sqrt{\langle \mathbf{q}_0^+, \mathbf{q}_0^+\rangle} =$$

$$= |\varkappa_1| \cdot 0 = 0,$$

la igualdad

$$|\mathbf{q}^+| = |\varkappa_1| \cdot |\mathbf{q}_0^+| \Leftrightarrow 0 = |\varkappa_1| \cdot 0$$

se cumple con *cualesquiera* valores de $\varkappa_1$. Aquí surge la indeterminación

$$|\varkappa_1| = \frac{0}{0}$$

y la comparación de las longitudes métricas de los vectores isótropos carece de sentido.

Las imágenes de las rectas isótropas $y = x$ e $y = -x$, que se muestran en la fig. 12, representan dos direcciones isótropas (2.25) no paralelas entre sí, existentes en el plano seudoeuclídeo. Todo radio vector perteneciente a la recta isótropa $y = x$, se descompone según la base en la forma

$$\mathbf{r} = x\mathbf{e}_1 + x\mathbf{e}_2 = x(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2).$$

Por lo tanto, es colinear de la primera dirección isótropa: $\mathbf{q}_0^+ = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$. Todo radio vector que pertenezca a la recta isótropa $y = -x$ será colinear de la segunda dirección isótropa:

$$\mathbf{r} = x\mathbf{e}_1 - x\mathbf{e}_2 = x(\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2) = x\mathbf{q}_0^-.$$

Por cada punto del plano seudoeuclídeo pasan dos rectas isótropas: una paralela a $\mathbf{q}_0^+$ y otra paralela a $\mathbf{q}_0^-$.

Las rectas isótropas que pasan por el origen de coordenadas dividen el plano seudoeuclídeo en cuatro sectores (véase la fig. 12). Estos sectores se determinan unívocamente por las desigualdades a que están sujetas las coordenadas de los pun-

los, pero nosotros emplearemos en adelante, para abreviar, los términos siguientes:

$$x^2 > y^2 \begin{cases} x > 0 \text{ es el sector derecho,} \\ x < 0 \text{ es el sector izquierdo,} \end{cases}$$

$$x^2 < y^2 \begin{cases} y > 0 \text{ es el sector superior,} \\ y < 0 \text{ es el sector inferior.} \end{cases}$$

Como la longitud de los radios vectores pertenecientes a los sectores derecho e izquierdo se expresan con números reales (véase (2.22)), nos permitimos, para abreviar, llamar «reales» a estos sectores. Para nombrar a los sectores superior e inferior utilizaremos el término de jerga «sectores imaginarios», teniendo en cuenta que las longitudes de los radios vectores pertenecientes a estos sectores se expresan con números imaginarios. En adelante emplearemos estos términos sin comillas.

Cualquier vector isótropo del plano seudoeuclídeo puede pertenecer a uno de los cuatro sectores. Para determinar esta pertenencia no importa el punto de aplicación del vector, sino únicamente su dirección. Si por traslación paralela se hace coincidir el origen del vector con el origen de coordenadas, el vector coincidirá con cierto radio vector, el cual precisamente indicará a qué sector pertenece el vector trasladado. Otro procedimiento para determinar la pertenencia de un vector consiste en trazar por su origen dos rectas isótropas que dividan el plano en sectores.

Como cualquier punto del plano se puede tomar como origen de coordenadas, las construcciones hechas en la fig. 12 ilustran las propiedades métricas de cualquier parte del plano seudoeuclídeo. Completaremos la ilustración con el análisis de un lugar geométrico de puntos análogo a una circunferencia en el plano euclídeo propio. Dicho lugar geométrico será una línea cuyos puntos se encontrarán a la misma distancia de un punto fijo, por ejemplo, del punto correspondiente al origen de coordenadas. En este caso hay que tener en cuenta que en el plano seudoeuclídeo existen distancias de dos tipos: expresables con números reales, y expresables con números imaginarios.

El lugar geométrico de los puntos, cuya distancia al origen de coordenadas es igual al número real 1, se define por la ecuación

$$|\mathbf{r}| = 1, \text{ ó } \langle \mathbf{r}, \mathbf{r} \rangle = 1. \qquad (2.26)$$

Los radios vectores de estos puntos pertenecen a los sectores reales (derecho e izquierdo). El lugar geométrico de los puntos, cuya distancia al origen de coordenadas es igual al número imaginario $\sqrt{-1}$, se define por la ecuación

$$|\mathbf{r}| = i, \text{ ó } \langle \mathbf{r}, \mathbf{r} \rangle = -1. \qquad (2.27)$$

Los radios vectores de estos puntos pertenecen a los sectores imaginarios (superior e inferior). Las líneas (2.26) y (2.27) se pueden considerar como parte del lugar geo-

métrico de los puntos determinado por la ecuación general

$$\langle \mathbf{r}, \mathbf{r} \rangle^2 = 1. \qquad (2.28)$$

Este lugar geométrico de puntos es natural que se llame circunferencia seudoeuclídea de radio unitario. La circunferencia seudoeuclídea no es una curva cerrada, sino que sufre interrupción en las rectas isótropas que pasan por su centro. En efecto, en estas isótropas no hay puntos que satisfagan las ecuaciones (2.26) y (2.27), ya que la distancia entre dos puntos cualesquiera de una isótropa es igual a cero.

Utilizando la fórmula (2.22), escribimos la ecuación (2.26) de las ramas reales de la circunferencia seudoeuclídea y la ecuación (2.27) de sus ramas imaginarias en forma de coordenadas

$$x^2 - y^2 = 1, \qquad (2.29)$$

$$x^2 - y^2 = -1 \text{ ó } y^2 - x^2 = 1. \qquad (2.30)$$

La circunferencia seudoeuclídea no podemos verla «al natural», pero podemos construir su imagen sobre el plano euclídeo propio del dibujo. Para eso consideraremos las relaciones (2.29) y (2.30) como si fueran las ecuaciones de las curvas en el plano euclídeo propio de la fig. 12. Entonces a la ecuación (2.29) le corresponderá la hipérbola equilátera con ramas en los sectores derecho e izquierdo, en tanto que a la ecuación (2.30), la hipérbola conjugada con las ramas en los sectores superior e inferior.

De asíntotas de ambas hipérbolas sirven las rectas $y = x$ e $y = -x$ que representan las rectas isótropas del plano seudoeuclídeo. Las ramas de las hipérbolas pueden acercarse a estas rectas tanto como se quiera, pero no las cortarán en parte alguna. Esto está de acuerdo con el hecho de que en las rectas isótropas que pasan por el centro de la circunferencia seudoeuclídea no hay puntos de esta circunferencia. Las ramas de las hipérbolas en la fig. 12 ilustran la diferencia en la medida de las distancias en los planos euclídeo propio y seudoeuclídeo. En el plano seudoeuclídeo todos los radios vectores cuyos extremos se encuentran en las curvas (2.29) tienen la misma longitud, igual a la unidad, y los radios vectores de todos los puntos de las ramas (2.30) tienen la misma longitud, igual a la unidad imaginaria. En el plano euclídeo propio de la fig. 12 las imágenes de estos radios vectores tienen longitudes que varían desde 1 hasta ∞.

§ 12. Relación de perpendicularidad de las rectas en el plano seudoeuclídeo

Sean

$$\mathbf{r}_1 = x_1\mathbf{e}_1 + y_1\mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \text{ y}$$

$$\mathbf{r}_2 = x_2\mathbf{e}_1 + y_2\mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

dos radios vectores en el plano seudoeuclídeo que satisfacen la definición analítica general de ortogonalidad

$$\langle \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2 \rangle = 0 \qquad (2.31)$$

(véase la explicación de esto en el § 10 después de la fórmula (2.20)). Aplicando la expresión del producto escalar (2.20), obtenemos la condición de ortogonalidad (2.31) en forma de coordenadas:

$$x_1x_2 - y_1y_2 = 0. \qquad (2.32)$$

De aquí se ve inmediatamente que no pueden ser perpendiculares entre sí los vectores que pertenecen a un mismo sector del plano seudoeuclídeo o a dos sectores de igual sentido (es decir, a dos sectores reales o a dos sectores imaginarios). Si los vectores $\mathbf{r}_1$ y $\mathbf{r}_2$ tienen longitud real, sus coordenadas satisfarán las desigualdades

$$|x_1| > |y_1|, \quad |x_2| > |y_2|,$$

y entonces

$$|x_1| \cdot |x_2| > |y_1| \cdot |y_2|,$$

lo cual es incompatible con la igualdad (2.32). Análogamente, si ambos vectores tienen longitud imaginaria, tendremos

$$\left.\begin{array}{l} |x_1| < |y_1| \\ |x_2| < |y_2| \end{array}\right\} \Rightarrow |x_1| \cdot |x_2| < |y_1| \cdot |y_2|$$

y para ellos también será imposible la igualdad (2.32).

Por el contrario, si los radios vectores $\mathbf{r}_1$ y $\mathbf{r}_2$ pertenecen a sectores de sentido distinto, es decir, si uno pertenece a un sector real y el otro a un sector imaginario, la condición (2.32) puede ser satisfecha con una relación determinada de las coordenadas de los vectores. El sentido geométrico de esa relación se verá con mayor claridad si la condición de perpendicularidad (2.32) se escribe en la forma

$$\frac{y_1}{x_1} = \frac{x_2}{y_2}. \qquad (2.33)$$

Con arreglo al plano euclídeo propio de la fig. 12, la relación (2.33) significa que la tangente del ángulo $\widehat{\mathbf{e}_1, \mathbf{r}_1}$ es igual a la tangente del ángulo $\widehat{\mathbf{e}_2, \mathbf{r}_2}$ y las imágenes de los vectores perpendiculares entre sí del plano seudoeuclídeo se sitúan simétricamente respecto de la bisectriz que separa los sectores a que pertenecen estos vectores. Para los vectores $\mathbf{r}_1$ y $\mathbf{r}_2$, en la fig. 12, esta bisectriz es la $x = y$ del primer ángulo entre las coordenadas. Esas bisectrices, como ya sabemos, sirven de imágenes de las rectas isótropas del plano seudoeuclídeo. Obsérvese que los mismos vectores $\mathbf{e}_1$ y $\mathbf{e}_2$ satisfacen la condición de perpendicularidad: su producto escalar es igual a cero (véase (2.19)) y sus imágenes sobre el plano euclídeo propio de la fig. 12 están situadas simétricamente respecto de la recta $y = x$ que las separa.

Si el radio vector $\mathbf{r}_1$ se hace girar en sentido contrario al de las agujas del reloj, aproximándolo a la isótropa $y = x$, a esta misma isótropa se aproximará por el otro lado el radio vector $\mathbf{r}_2$, perpendicular l $\mathbf{r}_1$. En el límite estos vectores tenderán a coincidir con la isótropa, lo que indica la perpendicularidad de la recta isótropa respecto de sí misma. En realidad esta conlusión no es una novedad para nosotros, ya que se llamó isótropo al vector no nulo cuya longitud, definida por la expresión $|\mathbf{r}| = \sqrt{\langle \mathbf{r}, \mathbf{r} \rangle}$, es igual a cero. Pero la anulación del producto escalar $\langle \mathbf{r}, \mathbf{r} \rangle$ significa que el vector $\mathbf{r}$ es perpendicular a sí mismo.

En la imagen del plano seudoeuclídeo en la fig. 12, la recta $y = -x$ forma un ángulo recto con la recta $y = x$. Por consiguiente las imágenes de las direcciones isótropas $\mathbf{q}_0^+$ y $\mathbf{q}_0^-$ del plano seudoeuclídeo (véase (2.25)) son en general perpendiculares entre sí. Pero esta apariencia de perpendicularidad contradice las verdaderas relaciones métricas en el plano seudoeuclídeo, de lo cual es fácil cerciorarse calculando el producto escalar

$$\langle \mathbf{q}_0^+, \mathbf{q}_0^- \rangle = \langle \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2, \ \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 \rangle =$$
$$= \langle \mathbf{e}_1, \ \mathbf{e}_1 \rangle - \langle \mathbf{e}_2, \ \mathbf{e}_2 \rangle = 1 - (-1) =$$
$$= 2 \neq 0.$$

La no igualdad a cero del producto significa que dos direcciones isótropas no paralelas del plano seudoeuclídeo no son perpendiculares entre sí.

Es significativo el hecho de que un radio vector trazado desde el centro de la circunferencia seudoeuclídea (2.28) a cualquiera de los puntos de ésta, es perpendicular a la tangente a la circunferencia en este punto. Demostraremos eso para las ramas imaginarias de la circunferencia, cuya ecuación (2.30) se puede representar en la forma

$$y = \pm\sqrt{x^2 + 1}.$$

Cualquier punto de estas ramas cuya abscisa sea x se determina por el radio vector

$$\mathbf{r} = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 = x\mathbf{e}_1 \pm \sqrt{x^2+1}\,\mathbf{e}_2.$$

Si se pasa a un punto tan próximo a él como se desee, de abscisa $x + \Delta x$, perteneciente a este mismo arco de circunferencia, el radio vector tendrá el incremento

$$\Delta\mathbf{r} = \{(x+\Delta x)\,\mathbf{e}_1 \pm \sqrt{(x+\Delta x)^2+1}\,\mathbf{e}_2\} -$$
$$- \{x\mathbf{e}_1 \pm \sqrt{x^2+1}\,\mathbf{e}_2\} = \Delta x \cdot \mathbf{e}_1 \pm$$
$$\pm \{\sqrt{(x+\Delta x)^2+1} - \sqrt{x^2+1}\}\,\mathbf{e}_2.$$

La recta que pasa por el punto $(x; y)$ de la circunferencia seudoeuclídea en la dirección del vector $\Delta\mathbf{r}$ es una cuerda de la rama de la circunferencia. Cuando $\Delta x \to 0$ esta cuerda tiende a la tangente y los incremen-

tos de las funciones pueden ser sustituidos por las diferenciales:

$$d\mathbf{r} = dx \cdot \mathbf{e}_1 \pm (\sqrt{x^2+1})' \, dx \cdot \mathbf{e}_2 =$$

$$= dx \cdot \mathbf{e}_1 \pm \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2+1}} \, \mathbf{e}_2.$$

El vector $d\mathbf{r}$ es colineal de la tangente. Es fácil comprobar que es perpendicular al radio vector $\mathbf{r}$, calculando el producto escalar (igual a cero)

$$\langle \mathbf{r},\ d\mathbf{r} \rangle = \left\langle x\mathbf{e}_1 \pm \sqrt{x^2+1}\,\mathbf{e}_2,\right.$$

$$\left. dx \cdot \mathbf{e}_1 \pm \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2+1}}\,\mathbf{e}_2 \right\rangle =$$

$$= x\,dx - \sqrt{x^2+1}\,\frac{x\,dx}{\sqrt{x^2+1}} = x\,dx - x\,dx = 0.$$

Razonamientos análogos pueden hacerse con respecto a las ramas reales de la circunferencia seudoeuclídea, representando su ecuación (2.29) en la forma

$$x = \pm\sqrt{y^2+1}.$$

En la imagen de la circunferencia seudoeuclídea (2.28) sobre el plano euclídeo propio de la fig. 12 también se manifiesta la perpendicularidad de la tangente al radio. Es fácil demostrar analíticamente que la tangente a la hipérbola (2.29) o (2.30) en cualquier punto de ella está dirigida simétricamente al radio vector de este punto respecto de la asíntota más próxima. Pero eso es el indicio gráfico de la perpendicularidad seudoeuclídea de las rectas.

Entre el conjunto infinito de pares de direcciones no isótropas, perpendiculares entre sí del plano seudoeuclídeo, solamente un par se puede expresar en el plano euclídeo propio en forma de dos rectas que se cortan bajo el ángulo $\pi/2$. Pero este par en la realidad no tiene privilegio alguno sobre los demás, que están representados en

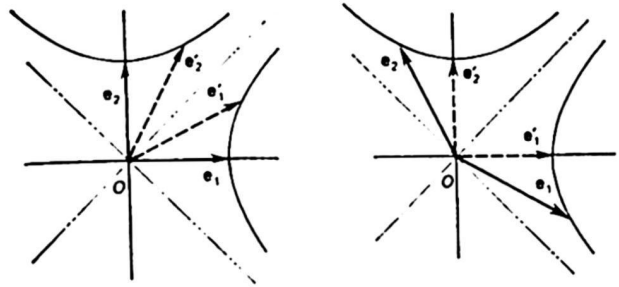


Fig. 13

forma de ángulos agudos y obtusos. En particular, los vectores perpendiculares entre sí de la base del plano seudoeuclídeo no es obligatorio representarlos formando ángulo recto. Cualquier par de radios perpendiculares entre sí de una circunferencia seudoeuclídea unitaria (2.28) puede tomarse como base ortogonalizada del plano seud euclídeo, y cada uno de ellos podem representarlo, si queremos, sobre el plano euclídeo propio, en forma de ángulo recto. Esto puede verse en la fig. 13, en la cual se muestran dos bases ortonormalizadas dis-

tintas de un plano seudoeuclídeo: la base e_1', e_2' marcada con apóstrofos, que, para abreviar, llamaremos «apostrofada», y la e_1, e_2, «no apostrofada». Estos dos procedimientos de representación de las bases ortogonales e_1, e_2 y e_1', e_2' del plano seudoeuclídeo, son igualmente correctas.

§ 13. Medida de ángulos en el plano seudoeuclídeo

La representación de las magnitudes de los ángulos en el plano seudoeuclídeo tenemos que desarrollarla partiendo de la definición analítica general de ángulo entre vectores por la fórmula (1.30):

$$\cos(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}}) = \frac{\langle \mathbf{a}, \mathbf{b}\rangle}{\sqrt{\langle \mathbf{a}, \mathbf{a}\rangle}\cdot\sqrt{\langle \mathbf{b}, \mathbf{b}\rangle}}.$$

Para tropezar inmediatamente con el carácter extraordinario de las nuevas representaciones, vamos a aplicar esta fórmula a un vector no isótropo cualquiera

$$\mathbf{a} = \alpha_1 \mathbf{e}_1 + \alpha_2 \mathbf{e}_2, \quad \alpha_1^2 - \alpha_2^2 \neq 0,$$

y al vector isótropo

$$\mathbf{q}_0^+ = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2:$$

$$\cos(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{q}_0^+}) = \frac{\langle \mathbf{a}, \mathbf{q}_0^+\rangle}{|\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{q}_0^+|} = \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{\sqrt{\alpha_1^2 - \alpha_2^2}\cdot 0} =$$

$$= \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{0} \to \infty$$

(aquí $\alpha_1 - \alpha_2 \neq 0$ en virtud de la condición de no isotropía $\alpha_1^2 - \alpha_2^2 \neq 0$ del vector a). El resultado obtenido destruye las limitaciones acostumbradas que se imponen al valor del coseno de un ángulo en el plano euclídeo propio ($-1 \leqslant \cos(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}}) \leqslant 1$). Se comprende que esta infracción de la desigualdad de Cauchy—Buniakovski dimana de la renuncia al 4° axioma del producto escalar de vectores (véase (1.33)). Al prescindir de la condición del cuarto axioma acordamos analizar vectores cuya longitud se expresa no sólo con números reales, sino también con imaginarios, lo cual, como es natural, introduce cambios en el carácter de la medida de los ángulos y en las funciones trigonométricas del ángulo. Al salirnos de ese modo de los límites del conjunto de los números reales, tendremos que tomar en consideración las funciones de argumento complejo. En la teoría de las funciones de variable compleja se estudia la prolongación analítica de las funciones trigonométricas en la región de los números complejos y se demuestra que en esta región se conservan las relaciones principales entre las funciones trigonométricas de argumento real. La prolongación indicada se expresa por medio de las fórmulas de Euler

$$\begin{aligned} e^{iz} &= \cos z + i\cdot\operatorname{sen} z, \\ e^{-iz} &= \cos z - i\cdot\operatorname{sen} z, \end{aligned} \qquad (2.34)$$

en las que $z = (x; y) = x + iy$ es cualquier número complejo; x e y son números reales, e $i = \sqrt{-1}$, es la unidad imagina-

ria. Sumando las ecuaciones (2.34) entre sí, obtenemos la expresión del coseno del argumento complejo mediante la función exponencial:

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}. \qquad (2.35)$$

En el caso general el coseno del argumento complejo toma valores expresados por números complejos, pero en dos casos particulares el coseno toma sólo valores reales. El primer caso es aquel en que el argumento del coseno es un número real ($z = (x; 0) = x$). Ésta es la función real cos x que todos conocemos. El segundo caso es aquel en que el argumento del coseno es un número imaginario. Haciendo la sustitución $z = (0; y) = iy$ en (2.35), se obtiene

$$\cos(iy) = \frac{e^{i(iy)} + e^{-i(iy)}}{2} = \frac{e^{-y} + e^{y}}{2}. \qquad (2.36)$$

Las funciones exponenciales e^{y} y e^{-y} del argumento real toman solamente valores reales, por consiguiente, el coseno del argumento imaginario cos (iy) toma también valores solamente reales. En este caso cos $(iy) \to \infty$ cuando $y \to \pm\infty$. Por lo tanto, el resultado $\cos \widehat{(\mathbf{a}, \mathbf{q}_0^+)} = \infty$ no carece de sentido desde el punto de vista de las matemáticas. Es más, permite enunciar dos suposiciones que necesitan ser confirmadas. Primera, la magnitud de un ángulo en el plano seudoeuclídeo se expresa, por lo visto, con un número imaginario. Segunda, esta magnitud puede tener un valor finito determinado sólo para los vectores pertenecientes a un mismo sector, ya que si los vectores a y b pertenecen a sectores distintos hay entre ellos, por lo menos, una isótropa, con la cual forma cada uno de los vectores un ángulo infinito. A propósito, conviene advertir que el coseno del ángulo entre dos direcciones isótropas $\mathbf{q}_0^+$ y $\mathbf{q}_0^-$ del plano seudoeuclídeo (véase (2.25)) también es infinito:

$$\cos \widehat{(\mathbf{q}_0^-, \mathbf{q}_0^+)} = \frac{\langle \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 \rangle}{|\mathbf{q}_0^-| \cdot |\mathbf{q}_0^+|} =$$

$$= \frac{\langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1 \rangle - \langle \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2 \rangle}{0 \cdot 0} = \frac{1 - (-1)}{0} = \frac{2}{0} = \infty.$$

Por ahora vamos a limitarnos al sector superior del plano seudoeuclídeo. El ángulo entre el versor $\mathbf{e}_2$ y cualquier radio vector $\mathbf{r}$ perteneciente a dicho sector

$$\mathbf{r} = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2,\ x^2 - y^2 < 0,\ y > 0$$

(véase la fig. 12), se determina por la relación

$$\cos \widehat{(\mathbf{e}_2, \mathbf{r})} = \frac{\langle \mathbf{e}_2, x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 \rangle}{|\mathbf{e}_2| \cdot |\mathbf{r}|} =$$

$$\frac{x\langle \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1 \rangle + y\langle \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2 \rangle}{i \cdot \sqrt{x^2 - y^2}} = \frac{x \cdot 0 + y \cdot (-1)}{i \cdot \sqrt{x^2 - y^2}} =$$

$$= \frac{-y}{i \cdot \sqrt{x^2 - y^2}} = \frac{iy}{\sqrt{x^2 - y^2}}.$$

La última expresión muestra que en el plano seudoeuclídeo el coseno del ángulo

tiene el mismo sentido geométrico que en el plano euclídeo propio. Efectivamente, en el triángulo OMN de la fig. 12, los lados MN y ON son perpendiculares entre sí en sentido seudoeuclídeo (puesto que MN es paralelo al versor $\mathbf{e}_1$ y ON es paralelo al versor $\mathbf{e}_2$) y pueden llamarse catetos. La longitud del cateto ON, perteneciente al ángulo $\widehat{NOM} = \widehat{\mathbf{e}_2, \mathbf{r}}$, se expresa con el número imaginario iy, y la longitud de la hipotenusa OM es el número imaginario $|\mathbf{r}| = \sqrt{x^2 - y^2} = |\overline{OM}|$ (en el sector superior $x^2 - y^2 < 0$). La relación de estas longitudes es un número real, igual al coseno del ángulo $\widehat{NOM}$:

$$\frac{|\overline{ON}|}{|\overline{OM}|} = \frac{iy}{\sqrt{x^2 - y^2}} = \frac{iy}{i\cdot\sqrt{y^2 - x^2}} = \frac{y}{\sqrt{y^2 - x^2}} = \cos(\widehat{\mathbf{e}_2, \mathbf{r}}). \qquad (2.37)$$

Si el vector $\mathbf{r}$ es colinear del versor $\mathbf{e}_2$ ($\mathbf{r} = y\mathbf{e}_2$, $x = 0$), el $\cos(\widehat{\mathbf{e}_2, \mathbf{r}}) = 1$. Pero si el vector $\mathbf{r}$ no es colinear del versor $\mathbf{e}_2$, es decir, si $x \neq 0$, entonces $\sqrt{x^2 - y^2} < y$ y el coseno del ángulo $\widehat{\mathbf{e}_2, \mathbf{r}}$ es mayor que la unidad. Este coseno tiende a infinito cuando $x^2 \to y^2$, es decir, cuando la dirección del vector $\mathbf{r}$ tiende a una de las direcciones isótropas. Subrayamos el notable sentido geométrico del hecho de que el coseno de

un ángulo en el plano seudoeuclídeo sea mayor que la unidad. Eso significa que *¡la magnitud de la proyección de un segmento es mayor que la longitud del propio segmento proyectado!*

La magnitud del ángulo $\widehat{\mathbf{e}_2, \mathbf{r}}$, desde el punto de vista analítico, no es más que el argumento de la función $\cos(\widehat{\mathbf{e}_2, \mathbf{r}})$. Esta función, de acuerdo con (2.37), toma cualesquiera valores reales del intervalo $[1; +\infty[$ exactamente igual que el coseno del argumento imaginario (véase (2.36)). Ahora hay que aclarar el contenido geométrico de la medida del ángulo en el plano seudoeuclídeo.

En el plano euclídeo propio la magnitud de un ángulo se determina valiéndose de una circunferencia de radio R arbitrario, cuyo centro se encuentra en el vértice del ángulo. Como magnitud del ángulo φ se toma la razón entre la longitud l del arco de circunferencia que comprenden sus lados y el radio de dicho arco: $\varphi = l/R$. Veamos a qué conduce el intento de determinar por un procedimiento análogo la magnitud del ángulo en el plano seudoeuclídeo.

Como se demostró en el § 12, un radio trazado a cualquier punto de una circunferencia seudoeuclídea es perpendicular a la tangente a la circunferencia en dicho punto. Los radios de todos los puntos de una rama de la circunferencia seudoeuclídea

pertenecen aun mismo sector. Supongamos, por ejemplo, que éste sea el sector superior y, por lo tanto, $|\mathbf{r}|$ será un número imaginario. En este caso las tangentes a la circunferencia en todos los puntos de esta rama serán rectas pertenecientes a los sectores reales (en virtud de su perpendicularidad a los radios imaginarios). La longitud de cada segmento de tangente y del pequeño trozo de arco adyacente a ella se expresará con un número real. Por consiguiente, la longitud de una parte cualquiera de la rama superior de la circunferencia seudoeuclídea también será real. La razón de la longitud del arco de circunferencia, comprendido entre dos radios cualesquiera del sector superior, a la longitud del radio de dicho arco, será un número imaginario. Para las ramas reales de la circunferencia, al contrario, la longitud del radio se expresará con un número real y la longitud del arco de circunferencia, con un número imaginario. La razón de estas longitudes será también un número imaginario.

De este modo, el lado cualitativo del problema lo hemos aclarado: si el ángulo entre los vectores del plano seudoeuclídeo se mide por la razón de la longitud del arco, comprendido entre ellos, al radio, la magnitud del ángulo se expresará con un número imaginario. Esto confirma la conclusión antes hecha, de que la magnitud del ángulo tiene valor finito determinado sólo dentro de los límites de un sector, ya que la circunferencia seudoeuclídea tiene *puntos de discontinuidad* en las isótropas, que pasan por su centro, y ellas son las que dividen el plano en sectores. Queda por examinar el problema desde el lado cuantitativo: ¿concuerda esta interpretación geométrica de la magnitud del ángulo con la continuación analítica (2.36) del coseno en la región de los valores imaginarios del argumento y con el sentido geométrico del coseno del ángulo como razón de la longitud del cateto adyacente a la longitud de la hipotenusa?

El pequeño elemento de arco de circunferencia seudoeuclídea que se confunde con el trozo de tangente se puede representar mediante la diferencial del radio vector (véase el § 12)

$$d\mathbf{r} = \mathbf{e}_1\, dx + \mathbf{e}_2\, dy,$$

cuya longitud es

$$|d\mathbf{r}| = dl = \sqrt{\langle d\mathbf{r},\ d\mathbf{r}\rangle} = \sqrt{dx^2 - dy^2}. \quad (2.38)$$

Tomamos, para concretar, la rama superior de la circunferencia unitaria con centro en el origen de coordenadas definida por la ecuación

$$y = \sqrt{x^2 + 1}$$

(que se obtiene de (2.30) cuando $y > 0$), y hallamos para ella la diferencial dy de la

ordenada, correspondiente al incremento dx de la abscisa:

$$dy = \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2+1}}.$$

Sustituyendo este valor en la fórmula (2.38), obtenemos

$$dl = \sqrt{dx^2 - dy^2} = \sqrt{\left(1 - \frac{x^2}{x^2+1}\right) dx^2} = \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}.$$

Consideremos el arco $\overset{\smile}{AM}$ de la circunferencia unitaria seudoeuclídea en la fig. 12. El punto A de intersección de la rama superior de la circunferencia con el eje OY tiene las coordenadas (0; 1), y un punto arbitrario M de esta rama, las coordenadas $(x; y)$. La longitud del arco $\overset{\smile}{AM}$ la calculamos por integración:

$$l_{\overset{\smile}{AM}} = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{t^2+1}} = \ln\left|t + \sqrt{t^2+1}\right|\Big|_0^x =$$

$$= \ln\left|x + \sqrt{x^2+1}\right| = \ln|x+y|.$$

Como el radio del arco $\overset{\smile}{AM}$ es $|\,\mathbf{e}_2\,| = i$, la magnitud del ángulo $\widehat{AOM}$ debe venir expresada por un número imaginario:

$$\widehat{AOM} = \frac{\ln|x+y|}{i} = -i \cdot \ln|x+y| = i\varphi,$$

donde con la letra φ se ha designado la magnitud *real*

$$\varphi = -\ln|x+y|, \qquad (2.39)$$

que de por sí *no tiene sentido geométrico de ángulo.*

El coseno del ángulo $\widehat{AOM}$ se puede hallar partiendo del triángulo OMN. Como OM es el radio de la circunferencia *unitaria* seudoeuclídea (en su rama superior), será $|\,\overline{OM}\,| = |\mathbf{e}_2| = i$, y por la fórmula (2.37) hallamos

$$\cos(i\varphi) = \cos\widehat{(\mathbf{e}_2, \mathbf{r})} = \frac{|\,\overline{ON}\,|}{|\,\overline{OM}\,|} = \frac{iy}{i} = y.$$

De este modo, si de la relación (2.39) obtenemos la expresión de la ordenada y del punto M mediante el parámetro real φ, esto nos da la expresión buscada del coseno del ángulo imaginario mediante la magnitud de dicho ángulo.

Potenciamos la igualdad logarítmica (2.39):

$$e^{\varphi} = 1/|x+y|. \qquad (2.40)$$

Para todos los puntos de la circunferencia seudoeuclídea con centro en el origen de coordenadas se cumple la condición $|x + y| > 0$, ya que entre ellos no hay puntos pertenecientes a la recta isótropa $y =$

$= -x$. En la rama superior, además, $y > 0$ e $|y| > |x|$. Por lo tanto

$$|x + y| = x + y$$

y la relación (2.40) se puede representar en la forma

$$e^{\varphi} = 1/(x+y), \qquad (2.41)$$

de donde se sigue que

$$\frac{1}{e^{\varphi}} = e^{-\varphi} = x + y. \qquad (2.42)$$

Calculamos la suma

$$e^{\varphi} + e^{-\varphi} = \frac{1}{x+y} + x + y = \frac{1+(x+y)^2}{x+y} =$$
$$= \frac{1+x^2+2xy+y^2}{x+y} = \frac{y^2+2xy+y^2}{x+y} =$$
$$= \frac{2y(x+y)}{x+y} = 2y.$$

En esta transformación hemos utilizado la ecuación (2.30) de las ramas imaginarias de la circunferencia

$$y^2 = x^2 + 1.$$

De esta forma, obtenemos

$$\cos(i\varphi) = y = \frac{e^{\varphi}+e^{-\varphi}}{2}. \qquad (2.43)$$

Si se quiere tener la expresión del coseno mediante la magnitud imaginaria $i\varphi$ del ángulo, se puede escribir (2.43) en la forma

$$\cos(i\varphi) = \frac{e^{-i(i\varphi)}+e^{i(i\varphi)}}{2}.$$

La fórmula (2.43), obtenida de los razonamientos geométricos, ha coincidido con la prolongación analítica del coseno en la región de los valores imaginarios del argumento (véase (2.36)). Con esto se justifica la medida de los ángulos en el plano seudoeuclídeo por la razón de la longitud del arco de circunferencia al radio, de un modo análogo a como se acostumbre medir el ángulo en el plano euclídeo propio.

Recurriendo a la relación (2.39), vamos a esclarecer qué valores puede tomar el ángulo $i\varphi$ entre el versor básico $\mathbf{e}_2$ y cualquier radio vector del sector superior. Como quiera que la función logarítmica real toma valores cualesquiera desde $-\infty$ hasta $+\infty$, el ángulo $i\varphi$ se puede expresar respectivamente, por cualquier número imaginario

$$-i\infty < i\varphi < +i\infty.$$

Si el punto $M(x; y)$ se aproxima en la rama superior de la circunferencia (véase la fig. 12) a la recta isótropa $y = x$, entonces

$$|x + y| \to +\infty \text{ y } \ln|x + y| \to +\infty.$$

En este caso

$$\varphi = -\ln|x + y| \to -\infty.$$

De este modo, el ángulo entre el versor $\mathbf{e}_2$ y el radio vector del segmento superior, que se aproxima a la isótropa $y = x$, se expresa por un número imaginario negativo que tiende a $-i\infty$. Por el contrario, si el punto $M(x; y)$ se aproxima, siguiendo la

rama superior de la circunferencia, a la isótropa $y = -x$, entonces

$$| x + y | \to 0, \ln | x + y | \to -\infty.$$

Por lo tanto,

$$\varphi = -\ln | x + y | \to +\infty$$

y el ángulo $i\varphi$ se expresará por un número imaginario positivo que tenderá a $+i\infty$. El ángulo entre la recta isótropa misma y el versor $\mathbf{e}_2$ no tiene valor numérico determinado (se convierte en $-i\infty$ o en $+i\infty$). Es más, como el ángulo entre cualquier vector no isótropo del sector superior y el versor $\mathbf{e}_2$ se expresa por medio de un número imaginario finito, se llega a la conclusión de que *cualquier vector no isótropo de este sector forma un ángulo infinito con cada una de las direcciones isótropas.*

Repitiendo los razonamientos sobre la medida de los ángulos (véanse las págs. 145—147) para la rama derecha

$$x = \sqrt{y^2 + 1}$$

de la circunferencia unitaria (véase (2.29)), llegamos a la expresión

$$\varphi = +\ln | x + y |,$$

que significa que el ángulo entre el versor $\mathbf{e}_1$ y un radio vector del sector derecho que se aproxime a la isótropa $y = x$ es positivo, y el ángulo medido desde $\mathbf{e}_1$ en dirección a la isótropa $y = -x$ es negativo. El diagrama de la fig. 14 ilustra la dirección positiva y los intervalos de medidas de los ángulos en los cuatro sectores del plano seudoeuclídeo. En todo el plano la dirección positiva de medición de los ángulos coincide con la dirección del giro más corto desde el primer vector básico hacia el segundo (durante el giro más corto, en ninguno de los estados intermedios se hace colinear el primer vector con el segundo).

Aunque en el plano seudoeuclídeo se puede construir un triángulo con dos lados

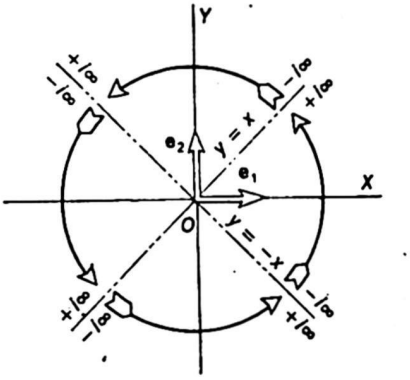


Fig. 14

perpendiculares entre sí (véase el $\triangle ONM$ en la fig. 12), a ese triángulo no se le puede llamar rectángulo, porque la relación de perpendicularidad en el plano seudoeuclídeo, en general, no está ligada con una magnitud determinada del ángulo, ya que

las rectas perpendiculares entre sí pertenecen a sectores distintos. Tampoco tiene una magnitud determinada el ángulo entre la hipotenusa OM y el cateto NM, porque pertenecen también a sectores diferentes. En el triángulo ONM de la fig. 12 *sólo tiene valor determinado* el ángulo $\widehat{NOM}$ entre los lados $\overline{ON}$ y $\overline{OM}$, que pertenecen a un mismo sector. No obstante, el triángulo con dos lados perpendiculares en el plano seudoeuclídeo desempeña el mismo papel, al construir las funciones trigonométricas del ángulo, que el triángulo rectángulo en el plano euclídeo propio. Ya hemos visto que para el coseno del ángulo en el plano seudoeuclídeo sigue siendo correcta su definición geométrica como razón de la longitud del cateto adyacente a la longitud de la hipotenusa. Ahora vamos a demostrar que la razón de la longitud del cateto opuesto a la longitud de la hipotenusa es el seno del ángulo en el plano seudoeuclídeo, puesto que coincide con la prolongación analítica de la función seno en la región de los valores imaginarios del argumento.

De la fórmula de Euler (2.34) hallamos

$$e^{iz} - e^{-iz} = 2i \cdot \operatorname{sen} z,$$

$$\operatorname{sen} z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}. \qquad (2.44)$$

Para los valores imaginarios del argumento $z = (0; y) = iy$ la fórmula (2.44) toma la forma

$$\operatorname{sen}(iy) = \frac{e^{i(iy)} - e^{-i(iy)}}{2} = -i\frac{e^{-y} - e^{y}}{2} =$$

$$= i\frac{e^{y} - e^{-y}}{2}. \qquad (2.45)$$

De acuerdo con (2.45), el seno del argumento imaginario tiene valores imaginarios, los cuales pueden ser positivos (para los valores positivos de y), negativos (para $y < 0$) o nulos (cuando $y = 0$). Al considerar la definición geométrica del seno hay que tener en cuenta esta variabilidad de su signo.

En el triángulo NOM de la fig. 12 la hipotenusa OM es el radio de la rama superior de la circunferencia unitaria y, por eso, tiene la longitud $|\overline{OM}| = i$. La longitud del cateto NM opuesto al ángulo $i\varphi$ se expresa por el número real $|\overline{NM}| = |x|$. Por lo tanto, la magnitud absoluta del seno del ángulo $i\varphi$ es igual a la razón

$$\frac{|\overline{NM}|}{|\overline{OM}|} = \frac{|x|}{i} = -i\,|x|. \qquad (2.46)$$

Si el punto M tiene la abscisa x positiva, el ángulo $\widehat{AOM}$ se expresa por el número imaginario negativo $i\varphi$ y, por consiguiente, el parámetro real φ es negativo. En este caso (véase (2.45)) la magnitud

$$i\frac{e^{\varphi} - e^{-\varphi}}{2}$$

también será negativa. Por lo tanto, para que la razón del cateto opuesto a la hipotenusa represente no sólo la magnitud absoluta, sino también el signo del seno, en (2.46) hay que tomar la abscisa x con su signo, omitiendo la designación de módulo. Entonces, para los ángulos positivos $i\varphi > i\cdot 0$, la abscisa x del punto M será negativa (véase la fig. 14) y sen $(i\varphi)$ tomará un valor positivo en completo acuerdo con (2.45). Así, pues, la definición geométrica del seno del ángulo $\widehat{AOM} = \widehat{NOM}$ en el triángulo NOM de la fig. 12 debe ser la siguiente:

$$\operatorname{sen}(i\varphi) = \operatorname{sen}(\widehat{e_2, r}) = \frac{x}{i} = -ix. \qquad (2.47)$$

La expresión de la abscisa x mediante el parámetro real φ la hallamos partiendo de las igualdades (2.41) y (2.42):

$$e^{\varphi} - e^{-\varphi} = \frac{1}{x+y} - (x+y) = \frac{1-(x+y)^2}{x+y} =$$
$$= \frac{1-x^2-2xy-y^2}{x+y} = \frac{-(y^2-1)-x^2-2xy}{x+y} =$$
$$= \frac{-2x^2-2xy}{x+y} = \frac{-2x(x+y)}{x+y} = -2x.$$

Aquí se ha utilizado la ecuación (2.30) de las ramas imaginarias de la circunferencia

$$x^2 = y^2 - 1.$$

De esta forma obtenemos

$$-x = \frac{e^{\varphi}-e^{-\varphi}}{2}, \quad -ix = i\frac{e^{\varphi}-e^{-\varphi}}{2}.$$

$$\operatorname{sen}(i\varphi) = i\frac{e^{\varphi}-e^{-\varphi}}{2}. \qquad (2.48)$$

Esta igualdad, obtenida de los razonamientos geométricos, coincide con la prolongación analítica (2.45) de la función seno en la región de los valores imaginarios del argumento.

Empleando las expresiones (2.43) y (2.48), hallamos la suma de los cuadrados del coseno y del seno del argumento imaginario:

$$\cos^2(i\varphi) + \operatorname{sen}^2(i\varphi) = \frac{(e^{\varphi}+e^{-\varphi})^2}{4} +$$
$$+ i^2\frac{(e^{\varphi}-e^{-\varphi})^2}{4} = \frac{1}{4}[(e^{2\varphi}+2e^{\varphi}e^{-\varphi}+e^{-2\varphi}) -$$
$$-(e^{2\varphi}-2e^{\varphi}e^{-\varphi}+e^{-2\varphi})] = \frac{1}{4}\cdot 4e^{\varphi}e^{-\varphi} =$$
$$= e^0 = 1.$$

Así, pues, la conocida identidad trigonométrica también es justa para el argumento imaginario:

$$\cos^2(i\varphi) + \operatorname{sen}^2(i\varphi) = 1. \qquad (2.49)$$

La tangente del argumento imaginario se determina analíticamente como la razón del seno al coseno:

$$\operatorname{tg}(i\varphi) = \frac{\operatorname{sen}(i\varphi)}{\cos(i\varphi)} = i\frac{e^{\varphi}-e^{-\varphi}}{e^{\varphi}+e^{-\varphi}}. \qquad (2.50)$$

A esto corresponde de un modo evidente la definición geométrica de la tangente como la razón de la longitud del cateto opuesto al ángulo $i\varphi$ a la longitud del cateto adyacente. Para el triángulo ONM en la fig. 12, tenemos

$$\operatorname{tg}(i\varphi) = \operatorname{tg}(\widehat{NOM}) = \frac{|\overline{NM}|}{|\overline{ON}|} = \frac{|\overline{NM}|\,/\,|\overline{OM}|}{|\overline{ON}|\,/\,|\overline{OM}|} = \frac{|x|}{i\,|y|}.$$

Para tener en cuenta el signo de la tangente, vamos a tomar, en la última relación, las coordenadas del punto M no en valor absoluto, sino con sus signos:

$$\operatorname{tg}(i\varphi) = \frac{x}{iy} = \frac{-ix}{y} = \frac{\operatorname{sen}(i\varphi)}{\cos(i\varphi)}.$$

La tangente del argumento imaginario sólo toma valores imaginarios.

En matemáticas hace ya mucho tiempo que se presta atención a las funciones notables del argumento real que se diferencian de las consideradas aquí del seno (2.48) y la tangente (2.50) del argumento imaginario solamente en que toman valores reales. También se ha advertido su relación con la hipérbola y cierta analogía, aunque bastante formal para la geometría euclídea propia, con el seno y la tangente. A estas

funciones se les han dado los nombres y las designaciones siguientes:

seno hiperbólico $\operatorname{sh}\varphi = \dfrac{e^{\varphi} - e^{-\varphi}}{2}$, (2.51)

tangente hiperbólica $\operatorname{th}\varphi = \dfrac{e^{\varphi} - e^{-\varphi}}{e^{\varphi} + e^{-\varphi}}$. (2.52)

La función *coseno hiperbólico* se define en realidad por una fórmula semejante

$$\operatorname{ch}\varphi = \frac{e^{\varphi} + e^{-\varphi}}{2}, \qquad (2.53)$$

a la del coseno imaginario (2.43), pero se diferencia en que el argumento del coseno hiperbólico se considera un número real. Sólo eso impide que se pueda considerar el coseno hiperbólico ch φ como la prolongación analítica del coseno en la región de los números imaginarios. Teniendo en cuenta la coincidencia de los valores que toman las funciones, se pueden escribir las siguientes igualdades entre las funciones del argumento imaginario y las funciones del argumento real (φ es un número real):

$$\cos(i\varphi) = \operatorname{ch}\varphi, \qquad (2.54)$$

$$\operatorname{sen}(i\varphi) = i\cdot\operatorname{sh}\varphi, \qquad (2.55)$$

$$\operatorname{th}(i\varphi) = i\cdot\operatorname{th}\varphi. \qquad (2.56)$$

Señalaremos también la relación

$$\operatorname{th}\varphi = \frac{\operatorname{sh}\varphi}{\operatorname{ch}\varphi}. \qquad (2.57)$$

Los valores imaginarios del seno y de la tangente están relacionados con los valores imaginarios de su argumento por la misma dependencia que los valores reales de las funciones hiperbólicas sh φ y th φ con el argumento real. En virtud de eso, las funciones hiperbólicas conviene utilizarlas para ilustrar gráficamente las funciones trigonométricas del ángulo imaginario. Para construir la gráfica cos $(i\varphi)$ tendríamos que utilizar un dibujo convencional, en el cual sobre un eje se marquen los valores imaginarios del argumento y, sobre el otro, los valores reales de la función. En vez de eso, se construye la gráfica del coseno hiperbólico utilizando la igualdad (2.54). Es de apreciar la posibilidad de reunir las gráficas de las funciones ch φ, sh φ y th φ en un solo dibujo (fig. 15), cosa imposible de hacer en el caso de las funciones cos $(i\varphi)$, sen $(i\varphi)$ y tg $(i\varphi)$. Hay que prestar atención a que los valores de la tangente hiperbólica están comprendidos en el intervalo de -1 a $+1$ y la th φ se aproxima asintóticamente a $+1$ cuando $\varphi \to +\infty$ y a -1 cuando $\varphi \to -\infty$, como se sigue de las fórmulas (2.52) y (2.57).

En los términos de las funciones hiperbólicas la identidad (2.49) toma la forma

$$\mathrm{ch}^2\varphi + i^2 \cdot \mathrm{sh}^2\varphi = 1, \text{ ó } \mathrm{ch}^2\varphi - \mathrm{sh}^2\varphi = 1. \quad (2.58)$$

Nos va a hacer falta expresar ch φ y sh φ mediante th φ. Dividimos los dos miembros de la igualdad (2.58) por $\mathrm{ch}^2\varphi$ (lo que siempre es posible, puesto que ch $\varphi \neq 0$)

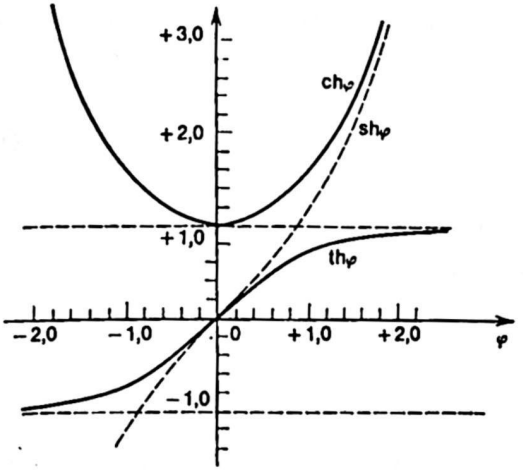


Fig. 15

y tomamos en consideración la relación (2.57):

$$1 - \frac{\mathrm{sh}^2\varphi}{\mathrm{ch}^2\varphi} = \frac{1}{\mathrm{ch}^2\varphi}, \quad 1 - \mathrm{th}^2\varphi = \frac{1}{\mathrm{ch}^2\varphi},$$

$$\mathrm{ch}\,\varphi = \frac{1}{\sqrt{1 - \mathrm{th}^2\varphi}}. \quad (2.59)$$

De donde hallamos

$$\mathrm{sh}\,\varphi = \mathrm{th}\,\varphi \cdot \mathrm{ch}\,\varphi = \frac{\mathrm{th}\,\varphi}{\sqrt{1 - \mathrm{th}^2\varphi}}. \quad (2.60)$$

14. Transformación de las coordenadas en el plano seudoeuclídeo

Si se cambia el sistema de coordenadas en el plano, es decir, si en vez de la base $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ y el polo O se toma otra base $\mathbf{e}'_1$, $\mathbf{e}'_2$ otro polo O', cambian las coordenadas de cada punto M. Los cambios, debidos al desplazamiento del polo en el vector OO', se definen fácilmente:

$$\mathbf{r}' = \overline{O'M} = \overline{OM} - \overline{OO'} = \mathbf{r} - \overline{OO'}$$

y no ofrecen gran interés para las aplicaciones físicas siguientes. Por eso vamos a estudiar aquí los cambios de base suponiendo que el polo O permanece invariable y, por consiguiente, tampoco varía el radio vector de cada punto. A los coeficientes de la descomposición del radio vector $\mathbf{r} = \overline{OM}$ según la base $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ (cuyos elementos no llevan apóstrofos)

$$\mathbf{r} = \overline{OM} = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 \qquad (2.61)$$

les llamaremos coordenadas sin apóstrofos x e y del punto M (respecto del sistema de coordenadas OXY sin apóstrofos). A los coeficientes de la descomposición de este mismo radio vector según la base $\mathbf{e}'_1$, $\mathbf{e}'_2$ (con apóstrofos)

$$\mathbf{r} = \overline{OM} = x'\mathbf{e}'_1 + y'\mathbf{e}'_2 \qquad (2.62)$$

les llamaremos coordenadas con apóstrofos x' e y' del punto M (respecto del sistema de coordenadas $OX'Y'$ con apóstrofos).

Para que por las conocidas coordenadas x, y sin apóstrofos del punto M se puedan calcular sus coordenadas con apóstrofos x', y', basta conocer la descomposición de los vectores $\mathbf{e}_1$ y $\mathbf{e}_2$ según la base apostrofada:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 &= \varepsilon'_{11}\mathbf{e}'_1 + \varepsilon'_{21}\mathbf{e}'_2 = \begin{pmatrix} \varepsilon'_{11} \\ \varepsilon'_{21} \end{pmatrix}, \\ \mathbf{e}_2 &= \varepsilon'_{12}\mathbf{e}'_1 + \varepsilon'_{22}\mathbf{e}'_2 = \begin{pmatrix} \varepsilon'_{12} \\ \varepsilon'_{22} \end{pmatrix}. \end{aligned} \qquad (2.63)$$

Sustituyendo estas descomposiciones en (2.61), obtenemos

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= x(\varepsilon'_{11}\mathbf{e}'_1 + \varepsilon'_{21}\mathbf{e}'_2) + y(\varepsilon'_{12}\mathbf{e}'_1 + \varepsilon'_{22}\mathbf{e}'_2) = \\ &= (x\varepsilon'_{11} + y\varepsilon'_{12})\,\mathbf{e}'_1 + (x\varepsilon'_{21} + y\varepsilon'_{22})\,\mathbf{e}'_2. \end{aligned} \qquad (2.64)$$

Las fórmulas (2.64) y (2.62) representan descomposiciones de un mismo vector r según una misma base $\mathbf{e}'_1$, $\mathbf{e}'_2$. Por eso, basándonos en el teorema de la uniformidad de la descomposición de un vector (elemento del espacio lineal) según una base, demostrado en el § 4, se puede afirmar que los coeficientes de los vectores básicos iguales en las descomposiciones (2.62) y (2.64) coinciden:

$$\begin{aligned} x' &= x\varepsilon'_{11} + y\varepsilon'_{12}, \\ y' &= x\varepsilon'_{21} + y\varepsilon'_{22}. \end{aligned} \qquad (2.65)$$

Esta es la fórmula de transformación de las coordenadas de cualquier punto (cualquier radio vector) de un plano cuando cambia la base.

Como quiera que las transformaciones (2.65) han sido obtenidas valiéndose solamente de operaciones lineales, ellas expresan las *propiedades lineales* del espacio y pueden aplicarse tanto a un plano euclídeo propio como al seudoeuclídeo. Pero si se toman en consideración las propiedades métricas del espacio, la transformación (2.63) de la base se puede definir en términos de longitudes y ángulos, con la particularidad de que estas características métricas se reflejan en las expresiones de las coordenadas ε'_{ik}, $i, k = 1, 2$, de diferente modo en los planos euclídeo propio y seudoeuclídeo.

A nosotros nos va a interesar no un cambio cualquiera de la base en el plano seudoeuclídeo, sino sólo el paso de una base *ortonormalizada* $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ a otra, también ortonormalizada, $\mathbf{e}'_1$, $\mathbf{e}'_2$. Es más, vamos a tomar la base con apóstrofos de tal forma que el versor $\mathbf{e}'_1$ se encuentre en el mismo sector que el versor $\mathbf{e}_1$, y el versor $\mathbf{e}'_2$, en el mismo sector que el versor $\mathbf{e}_2$. Con estas condiciones la correlación de las bases $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ y $\mathbf{e}'_1$, $\mathbf{e}'_2$ puede expresarse unívocamente por medio de un solo parámetro: el ángulo entre los vectores básicos de igual sentido. Teniendo en cuenta la futura aplicación física de las órmulas de transformación de las coordenadas, tomaremos como base el ángulo *dirigido*

$$\overset{\curvearrowright}{\mathbf{e}_2,\ \mathbf{e}'_2} = i\varphi \qquad (2.66)$$

(el ángulo se mide en el sentido de $\mathbf{e}_2$ a $\mathbf{e}'_2$). El signo del ángulo $i\varphi$, de acuerdo con la fig. 14, indica en qué sentido, respecto del versor $\mathbf{e}_2$, está desviado el versor $\mathbf{e}'_2$. La dirección del versor $\mathbf{e}'_1$ viene determinada unívocamente por la condición de que ha de ser perpendicular al versor $\mathbf{e}'_2$. Estas condiciones impuestas a las bases $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ y $\mathbf{e}'_1$, $\mathbf{e}'_2$ se expresan analíticamente como sigue:

1) la condición de ortonormalización

$$\begin{pmatrix} \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1\rangle & \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\rangle \\ \langle \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1\rangle & \langle \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle \mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_1\rangle & \langle \mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2\rangle \\ \langle \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_1\rangle & \langle \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_2\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; \qquad (2.67)$$

2) la condición de pertenencia de los versores básicos homólogos a un mismo sector

$$\varepsilon'_{11} > 0, \quad \varepsilon'_{22} > 0. \qquad (2.68)$$

En virtud de la condición de ortonormalización (2.67), los coeficientes ε'_{ik}, $i, k = 1, 2$, en las descomposiciones (2.63) deberán satisfacer las siguientes relaciones:

$$\langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1\rangle = 1 \Leftrightarrow (\varepsilon'_{11})^2 - (\varepsilon'_{21})^2 = 1, \qquad (2.69)$$

$$\langle \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2\rangle = -1 \Leftrightarrow (\varepsilon'_{12})^2 - (\varepsilon'_{22})^2 = -1, \qquad (2.70)$$

$$\langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\rangle = 0 \Leftrightarrow \varepsilon'_{11}\varepsilon'_{12} - \varepsilon'_{21}\varepsilon'_{22} = 0. \qquad (2.71)$$

De donde hallamos

$$(\varepsilon'_{11})^2-(\varepsilon'_{21})^2=(\varepsilon'_{22})^2-(\varepsilon'_{12})^2, \qquad (2.72)$$

$$\varepsilon'_{11}\varepsilon'_{12}=\varepsilon'_{21}\varepsilon'_{22}, \quad \varepsilon'_{12}=\varepsilon'_{22}\frac{\varepsilon'_{21}}{\varepsilon'_{11}},$$

$$(\varepsilon'_{12})^2=(\varepsilon'_{22})^2\left(\frac{\varepsilon'_{21}}{\varepsilon'_{11}}\right)^2. \qquad (2.73)$$

aciendo la sustitución (2.73) en (2.72), btenemos

$$(\varepsilon'_{11})^2-(\varepsilon'_{21})^2=(\varepsilon'_{22})^2-(\varepsilon'_{22})^2\left(\frac{\varepsilon'_{21}}{\varepsilon'_{11}}\right)=$$

$$=(\varepsilon'_{22})^2\left[1-\left(\frac{\varepsilon'_{21}}{\varepsilon'_{11}}\right)^2\right],$$

$$(\varepsilon'_{11})^2-(\varepsilon'_{21})^2=\left(\frac{\varepsilon'_{22}}{\varepsilon'_{11}}\right)^2[(\varepsilon'_{11})^2-(\varepsilon'_{21})^2]. \qquad (2.74)$$

Y como $(\varepsilon'_{11})^2-(\varepsilon'_{21})^2=1$ (véase (2.69)), e (2.74) se infiere que

$$\left(\frac{\varepsilon'_{22}}{\varepsilon'_{11}}\right)^2=1.$$

Esta última relación se cumple en dos casos:

$$\varepsilon'_{22}=\varepsilon'_{11} \text{ y } \varepsilon'_{22}=-\varepsilon'_{11}.$$

Pero la segunda de estas igualdades contradice la condición (2.68). Sólo queda aceptable la igualdad

$$\varepsilon'_{22}=\varepsilon'_{11}. \qquad (2.75)$$

Ella, en combinación con la condición de perpendicularidad (2.71), conduce a la igualdad

$$\varepsilon'_{12}=\varepsilon'_{21}. \qquad (2.76)$$

Nosotros vamos a utilizar las ecuaciones (2.75) y (2.76) para expresar los coeficientes ε'_{ik}, $i, k=1, 2$, mediante el ángulo $\widehat{\mathbf{e}_2, \mathbf{e}'_2}=i\varphi$ (véase 2.66)). Calculamos los productos escalares

$$\langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}'_1\rangle=\langle \varepsilon'_{11}\mathbf{e}'_1+\varepsilon'_{21}\mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_1\rangle=\varepsilon'_{11}\langle \mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_1\rangle=\varepsilon'_{11},$$

$$\langle \mathbf{e}_2, \mathbf{e}'_2\rangle=\langle \varepsilon'_{12}\mathbf{e}'_1+\varepsilon'_{22}\mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_2\rangle=\varepsilon'_{22}\langle \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_2\rangle=$$

$$=-\varepsilon'_{22}=-\varepsilon'_{11}.$$

Como los versores $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}'_1$ pertenecen a un mismo sector (al derecho), el ángulo entre ellos tiene valor determinado y el coseno de este ángulo es

$$\cos(\widehat{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}'_1})=\frac{\langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}'_1\rangle}{|\mathbf{e}_1|\cdot|\mathbf{e}'_1|}=\frac{\varepsilon'_{11}}{1\cdot 1}=\varepsilon'_{11}. \qquad (2.77)$$

Y como los versores $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}'_2$ también pertenecen a un mismo sector (el superior), el ángulo entre ellos tiene también valor determinado y el coseno de este ángulo es

$$\cos(\widehat{\mathbf{e}_2, \mathbf{e}'_2})=\frac{\langle \mathbf{e}_2, \mathbf{e}'_2\rangle}{|\mathbf{e}_2|\cdot|\mathbf{e}'_2|}=\frac{-\varepsilon'_{11}}{i\cdot i}=$$

$$=\frac{-\varepsilon'_{11}}{-1}=\varepsilon'_{11}. \qquad (2.78)$$

De la igualdad de los cosenos

$$\cos(\widehat{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}'_1})=\cos(\widehat{\mathbf{e}_2, \mathbf{e}'_2})$$

sigue la igualdad de las magnitudes absotas de los ángulos (puesto que el coseno es función par):

$$|\widehat{e_1, e_1'}| = |\widehat{e_2, e_2'}| = |i\varphi|.$$

Sustituyendo (2.77) en (2.69), hallamos

$$(\varepsilon_{21}')^2 = (\varepsilon_{11}')^2 - 1 = \cos^2(\widehat{e_1, e_1'}) - 1 = \\ = \cos^2(i\varphi) - 1 = \operatorname{ch}^2\varphi - 1 = \operatorname{sh}^2\varphi$$

(véase (2.58)). Por consiguiente, basándonos en (2.76) tenemos

$$(\varepsilon_{12}')^2 = (\varepsilon_{21}')^2 = \operatorname{sh}^2\varphi.$$

así, ante nosotros tenemos dos posibiliades:

$$\text{o } \varepsilon_{21}' = \varepsilon_{12}' = \operatorname{sh}\varphi.$$
$$\text{o bien } \varepsilon_{21}' = \varepsilon_{12}' = -\operatorname{sh}\varphi.$$

El problema de la elección del signo del seno hiperbólico está relacionado con el sendo en que se miden los ángulos $\widehat{e_2, e_2'}$ y $\widehat{e_1, e_1'}$. Por el sentido que tiene la perpendicularidad de los vectores no isótropos del plano seudoeuclídeo (véase el § 12), los sentidos en que se miden los ángulos $\widehat{e_2, e_2'}$ y $\widehat{e_1, e_1'}$ son opuestos entre sí. Esto se confirma examinando los signos de los coeficientes ε_{21}' y ε_{12}'. Para facilitar el análisis, en la fig. 16 los versores de la base con apóstrofos e_1', e_2', según los cuales se descomponen los vectores e_1 y e_2 (véase (2.63)), se representan formando un ángulo recto. Si los coeficientes $\varepsilon_{21}' = \varepsilon_{12}'$ son positivos, la componente $\varepsilon_{21}'e_2'$ del vector

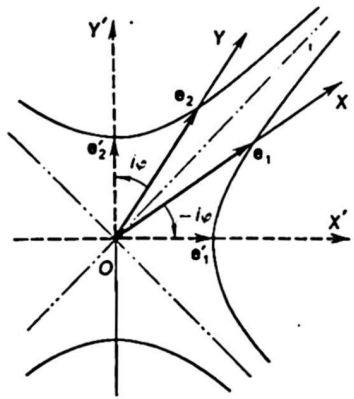


Fig. 16

e_1 estará dirigida en el mismo sentido que el versor e_2' y la componente $\varepsilon_{12}'e_1'$ del vector e_2, lo estará en el mismo sentido que el versor e_1'. Este caso es, precisamente, el representado en la fig. 16. En ella se ve que los ángulos $\widehat{e_2, e_2'}$ y $\widehat{e_1, e_1'}$ tienen sentidos opuestos y que el ángulo $\widehat{e_2, e_2'} = i\varphi$ es positivo. De la condición $i\varphi > i \cdot 0$ se sigue que $\varphi > 0$ y $\operatorname{sh}\varphi > 0$ (véase la fig. 15). Si los valores de los coeficientes

ε'_{21} y ε'_{12} son negativos, la componente $\varepsilon'_{21}\mathbf{e}'_2$ del vector $\mathbf{e}_1$ estará dirigida en sentido opuesto al versor $\mathbf{e}'_2$ y la componente $\varepsilon'_{12}\mathbf{e}'_1$ del vector $\mathbf{e}_2$ estará dirigida en sentido opuesto al versor $\mathbf{e}'_1$. Entonces los sentidos en que se miden los ángulos $\mathbf{e}_2, \mathbf{e}'_2$ y $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}'_1$ también serán opuestos entre sí, pero el ángulo $\mathbf{e}_2, \mathbf{e}'_2$ será negativo. De este modo, si el signo de los coeficientes ε'_{21} y ε'_{12} se pone de acuerdo con el ángulo $\mathbf{e}_2, \mathbf{e}'_2 = i\varphi$ (véase (2.66)), debe tomarse

$$\varepsilon'_{21} = \varepsilon'_{12} = \operatorname{sh}\varphi, \qquad (2.79)$$

que es lo que hacemos.

Haciendo las sustituciones (2.78), (2.75) y (2.79) en (2.65), obtenemos las fórmulas de transformación

$$\begin{aligned} x' &= x\cdot\operatorname{ch}\varphi + y\cdot\operatorname{sh}\varphi, \\ y' &= x\cdot\operatorname{sh}\varphi + y\cdot\operatorname{ch}\varphi \end{aligned} \qquad (2.80)$$

de las coordenadas de los puntos del plano seudoeuclídeo al girar los vectores de la base ortonormalizada, al encuentro uno de otro, un ángulo $i\varphi$.

A las fórmulas (2.80) les damos una orma algo distinta, expresando el coseno hiperbólico y el seno hiperbólico mediante la tangente hiperbólica, según las fórmulas (2.59) y (2.60):

$$x' = \frac{x + y\cdot\operatorname{th}\varphi}{\sqrt{1-\operatorname{th}^2\varphi}}, \quad y' = \frac{y + x\cdot\operatorname{th}\varphi}{\sqrt{1-\operatorname{th}^2\varphi}}. \qquad (2.81)$$

CAPÍTULO 3

Contenido geométrico de la teoría especial de la relatividad

> «... si la forma de manifestarse y la esencia de las cosas coincidieran directamente, toda ciencia estaría de más ...»
>
> *C. Marx*

§ 15. Transformación de Lorentz

El movimiento de todos los cuerpos (puntos materiales) está regido por las leyes de la mecánica de Newton. Pero estas leyes sólo son justas en determinadas condiciones. Figurémonos un observador dentro de una cámara cerrada, en movimiento acelerado respecto de la superficie terrestre, que no sepa nada acerca de su movimiento. Haciendo experimentos mecánicos, este observador puede descubrir que un cuerpo, sobre el cual no actúen otros, puede moverse con aceleración respecto de la cámara. Este resultado, al parecer, contradice la primera ley de Newton (ley de la inercia), pero no la niega y se explica dentro del marco de la ley por el hecho de que el propio sistema de coordenadas (la cámara) tiene movimiento acelerado. Los sistemas de coordenadas en los cuales *se observa* infracción de la ley de la inercia se dice que son *no inerciales*. Y los sistemas en los cuales no se observa infracción de dicha ley, reciben el nombre

de *inerciales*. En muchos casos un sistema e coordenadas en reposo, respecto de la superficie de la Tierra, se puede considerar nercial con suficiente grado de exactitud. Para poner de manifiesto su carácter no nercial es preciso hacer experimentos espeiales, por ejemplo, el experimento con el péndulo de Foucault, que indica la rotación de la Tierra. El sistema cuyo carácter inercial se ha establecido con mayor exactitud es el sistema de coordenadas cuyo origen está ligado con el Sol y sus ejes están dirigidos a estrellas elegidas convenientemente [2]. Todo sistema de coordenadas que se mueva con velocidad constante (o que esté en reposo), respecto de un sistema inercial, es también inercial. Vamos a estudiar el movimiento más simple de un punto material: su movimiento a lo largo de una recta, pero suponiendo que en esta recta existe un sistema de coordenadas en el cual se cumplen todas las leyes de la mecánica de Newton, o sea, un sistema inercial de coordenadas. Supongamos que el origen del sistema inercial de coordenadas está ligado a un punto material O. Tomando sobre la recta la unidad de medida de longitud y el sentido positivo, obtenemos un sistema de coordenadas inercial unidimensional OX (fig. 17).

Supongamos que a lo largo del eje OX se mueve *con velocidad constante* v un punto material O'. Tomemos este punto como origen de otro sistema de coordenadas $O'X'$ sobre la misma recta (o sobre otra recta próxima paralela a ella, como muestra la fig. 17) y consideremos que los sentidos positivos de ambos sistemas de coordenadas coinciden. El sistema $O'X'$ es inercial, puesto que se mueve con velocidad constante respecto del sistema inercial de coordenadas OX. De acuerdo con el principio de la relatividad de Galileo, cada uno de los

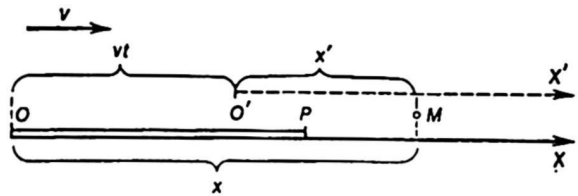


Fig. 17

sistemas inerciales OX y $O'X'$ se puede considerar en reposo con igual razón. Por eso no vamos a dar al sistema OX el epíteto de «inmóvil», sino que le llamaremos sistema de coordenadas inercial no apostrofado para así distinguirlo del sistema inercial apostrofado $O'X'$.

Los sistemas inerciales que se mueven uno respecto del otro se diferencian esencialmente, por su mutua relación, de los sistemas de coordenadas que se consideran en los problemas puramente geométricos, en los cuales los sistemas apostrofado y no apostrofado ocupan una posición fija en el espacio. En el caso de los sistemas inmóviles entre sí la transformación de las

ordenadas se define solamente por parámetros geométricos: distancias, ángulos, coordenadas de vectores y de puntos. Al pasar a un sistema de coordenadas en movimiento hay que tomar en consideración n parámetro de otra clase, el tiempo. El problema deja de ser puramente geométrico en el sentido tradicional y para su resolución se requieren, además de los axiomas del espacio lineal y del producto escalar de vectores, algunas aserciones que atañen las propiedades físicas del universo.

Una de ellas es la afirmación de la invariancia de los intervalos de tiempo. Supongamos que en el sistema de coordenadas OX (véase la fig. 17) está en reposo una barra OP. El punto material O', durante el proceso de su movimiento a lo largo del eje OX, coincide con el punto O en cierto instante, que tomaremos como origen para la cuenta del tiempo $t_0 = 0$ por un reloj solidario del sistema OX. Más tarde, en el instante t_P, medido por el mismo reloj, el punto material O' coincidirá con el punto P del eje OX. El intervalo de tiempo entre estos dos sucesos lo designaremos por $t_P - t_0 = \tau$. Pero los instantes en que el punto material O' coincide con los extremos O y P se pueden registrar también por medio de un reloj solidario del sistema de coordenadas inercial $O'X'$. Como instante de referencia del tiempo por este reloj tomamos también el correspondiente al suceso de la coincidencia de los puntos materiales O' y O ($t'_0 = 0$). La coincidencia de los puntos materiales O' y P se producirá en el instante t'_P según el reloj solidario del sistema inercial apostrofado $X'O'$. El intervalo de tiempo entre los dos sucesos según este reloj es $t'_P - t'_0 = \tau'$. De acuerdo con la experiencia de la vida ordinaria y con los experimentos científicos en que se apoyaba la física clásica, no se aprecia diferencia alguna entre los intervalos de tiempo τ y τ'. La igualdad

$$\tau = \tau' \tag{3.1}$$

expresa la invariancia del intervalo de tiempo entre dos sucesos, es decir, su independencia de cuál de los dos sea el sistema de coordenadas inercial en que se mida el tiempo. Por otra parte, tampoco hubo necesidad de hacer experimentos para comprobar la exactitud de la igualdad (3.1) mientras imperaron las ideas clásicas del espacio y el tiempo. Por lo visto, la relación (3.1) se admitía simplemente en los razonamientos teóricos como indudable de por sí y entre las deducciones teóricas y los resultados experimentales no se apreciaban contradicciones.

Aún menores eran los motivos visibles para dudar del convencimiento de que la longitud de la barra OP no depende de en cuál de los sistemas de coordenadas inerciales se haga la medición. En el sistema de coordenadas no apostrofado OX la barra OP está inmóvil. Las coordenadas $x_O = 0$

y $x_P = l$ de sus extremos no varían con el tiempo y, por lo tanto, la longitud de la barra es igual a la diferencia de las coordenadas

$$x_P - x_O = l$$

independientemente del instante en que se mida cada coordenada. Pero según el principio de la relatividad de Galileo, los sistemas de coordenadas inerciales OX y $O'X'$ son equivalentes con respecto a cualesquiera experimentos mecánicos. La diferencia entre ellos consiste solamente en nuestra idea acerca de qué es lo que se mueve y qué es lo que está en reposo. Si como inmóvil se toma el sistema de coordenadas $O'X'$, la barra OP resulta que se mueve a lo largo del eje $O'X'$ con velocidad v en el sentido de los valores negativos de la coordenada x'. Para expresar la longitud de la barra *en movimiento* en forma de diferencia entre las coordenadas con apóstrofos de sus extremos, tiene importancia esencial medir estas coordenadas en *un mismo* instante con el reloj solidario del sistema de coordenadas apostrofado. Por ejemplo, en el instante $t'_0 = 0$ el extremo O de la barra coincide con el origen de coordenadas del sistema $O'X'$ y tiene en este sistema la coordenada $x'_O = 0$. En *ese mismo* instante t'_0 el extremo P de la barra coincide con el punto del eje $O'X'$, cuya abscisa es $x'_P = l'$. La diferencia

$$x'_P - x'_O = l'$$

es la longitud de la barra según las mediciones en el sistema $O'X'$. La igualdad

$$l = l' \qquad (3.2)$$

expresa la invariancia de la longitud de la barra. De la igualdad (3.2) también se puede decir que era confirmada por la experiencia de la vida ordinaria y por los experimentos científicos de la física clásica.

La afirmación de la invariancia de los intervalos de tiempo y de las distancias en el espacio corresponde con toda rigurosidad lógica a las ideas clásicas del universo, según las cuales todos los objetos materiales están sumergidos en un espacio tridimensional único, euclídeo propio, y abarcados por un proceso general de transcurso del tiempo. Nosotros percibimos los objetos materiales en forma de cuerpos. El modelo abstracto de un cuerpo, objeto principal de la mecánica clásica, es el punto material. En el aspecto geométrico el punto material es un punto del espacio tridimensional euclídeo propio, y en el aspecto físico se diferencia de los puntos vacíos de este espacio en que tiene masa y está sujeto en sus movimientos a las leyes de la mecánica de Newton. La distancia entre puntos determinados del especio no depende del sistema de coordenadas que se emplee para indicar la posición de los puntos. Un sistema de coordenadas móvil podemos figurárnoslo como un conjunto infinito de sistemas de coordenadas fijos que se van sustituyendo

con una secuencia determinada. Por eso una magnitud invariante respecto del cambio de sistemas de coordenadas no puede perder su invariancia, cuando los sistemas se mueven uno respecto de otro.

Partiendo de estas ideas no es difícil explicar cómo se transforma la coordenada de un punto cualquiera del espacio unidimensional representado en la fig. 17, al pasar del sistema de coordenadas inercial OX al sistema inercial $O'X'$. Tomando el suceso de la coincidencia de los puntos materiales O y O' como instante de referencia para el cómputo del tiempo por los relojes solidarios de cada sistema y teniendo en cuenta la invariancia de los intervalos de tiempo (3.1), se llega a la conclusión de que en cualquier instante t según el reloj del sistema de coordenadas no apostrofado, el reloj del sistema de coordenadas apostrofado indicará un tiempo t' que satisfará la igualdad

$$t' = t. \qquad (3.3)$$

Supongamos que un punto arbitrario M del espacio unidimensional que consideramos tiene en el sistema OX la coordenada x en el instante t. En este mismo instante el punto material O' tiene en el sistema OX la coordenada $x_{O'} = vt$, y la coordenada del punto M respecto del sistema $O'X'$ se determina por la igualdad (véase la fig. 17)

$$x' = x - vt. \qquad (3.4)$$

El conjunto de las fórmulas (3.3) y (3.4) recibe el nombre de *transformación de coordenadas de Galileo*. La transformación de Galileo se inscribe orgánicamente en la armoniosa teoría de la mecánica clásica con sus ideas fundamentales sobre la invariancia de los intervalos de tiempo, de las distancias espaciales y de las masas de los puntos materiales. Cuando la física tropezó con fenómenos que contradecían la invariancia de estas magnitudes, empezó a dudarse de si son correctas las transformaciones de Galileo.

Para explicar el resultado negativo del experimento de Michelson—Morley [3], dos físicos, H.A. Lorentz y G.F. Fitzgerald propusieron, independientemente uno de otro, en 1892, la hipótesis de que las dimensiones de los cuerpos se acortan en la dirección de su movimiento [16]. Eso era un intento de corregir la imagen clásica del universo teniendo en cuenta la acción de un medio enigmático (el éter universal) sobre los cuerpos que se mueven en él. En 1895 H.A. Lorentz introdujo el concepto de tiempo local, el cual, en los cuerpos que se mueven, transcurre de un modo distinto que en los que están en reposo respecto del éter. En 1905 A. Einstein propuso una nueva forma de abordar el problema. Generalizando hechos experimentales, formuló dos postulados (véase el § 1), cuya aplicación conjunta contradice la transformación de Galileo. Einstein demostró que entre

estos postulados no existe contradicción interna, pero de su combinación se infiere una transformación de coordenadas en el espacio y unos cómputos de tiempo al pasar de un sistema de coordenadas inercial a otro, distinta de la de Galileo. Una transformación análoga fue hallada antes formalmente por Lorentz, y Henri Poincaré introdujo el término de «transformación de Lorentz» y «grupo de Lorentz» [16]. Einstein también llamó a las fórmulas deducidas por él transformación de Lorentz. Con arreglo al movimiento relativo antes considerado de los sistemas OX y $O'X'$ en un espacio unidimensional con las mismas designaciones que en la fig. 17 y en las fórmulas (3.3) y (3.4), la transformación de Lorentz tiene la forma siguiente:

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1-(v/c)^2}}, \quad t' = \frac{t - \frac{xv}{c^2}}{\sqrt{1-(v/c)^2}}. \qquad (3.5)$$

Aquí c es la velocidad de la luz en el vacío, la cual, según el segundo postulado de Einstein, es igual en todos los sistemas de coordenadas inerciales. Si la velocidad v del movimiento relativo de los sistemas inerciales es despreciable por su pequeñez en comparación con la velocidad de la luz ($v \ll c$, $v/c \approx 0$), de la transformación de Lorentz (3.5) se obtienen las fórmulas (3.3) y (3.4) de la transformación de Galileo. En la teoría de Einstein la transformación

(3.5) intervino como un descubrimiento de propiedades fundamentales, hasta entonces desconocidas, del espacio y del tiempo, como el anuncio de una nueva visión del universo, cuyos rasgos principales el primero en verlos fue Herman Minkowski. De las fórmulas (3.5) se infieren como corolarios todos los sorprendentes efectos de la teoría especial de la relatividad. Durante los ocho decenios de existencia de esta teoría, la transformación de Lorentz ha sido sometida a completas y meticulosas comprobaciones y se ha confirmado en la ciencia como profunda ley de la naturaleza.

§ 16. Qué nos dice la comparación de la transformación de Lorentz con la transformación de coordenadas en un plano seudoeuclídeo

Escribamos una junto a otra la transformación (2.81) de las coordenadas en el plano seudoeuclídeo y la transformación de Lorentz (3.5):

$$x' = \frac{x + y \cdot \operatorname{th}\varphi}{\sqrt{1-\operatorname{th}^2\varphi}}, \qquad x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1-(v/c)^2}},$$

$$y' = \frac{y + x \cdot \operatorname{th}\varphi}{\sqrt{1-\operatorname{th}^2\varphi}}, \qquad t' = \frac{t - \frac{xv}{c^2}}{\sqrt{1-(v/c)^2}}.$$

Las respectivas fórmulas de estas transformaciones, por su estructura, son evidentemente semejantes. Salta a la vista inmediatamente la correspondencia

$$\operatorname{th}^2\varphi \leftrightarrow (v/c)^2.$$

En un examen más detallado se manifiestan las relaciones

$$y = ct, \tag{3.6}$$

$$\text{th}\,\varphi = -v/c, \tag{3.7}$$

las cuales, sustituyéndolas en las fórmulas (2.81), transforman a éstas en las fórmulas (3.5):

$$x' = \frac{x + ct(-v/c)}{\sqrt{1-(v/c)^2}} = \frac{x - vt}{\sqrt{1-(v/c)^2}},$$

$$y' = \frac{ct + x(-v/c)}{\sqrt{1-(v/c)^2}} = c\,\frac{t - \frac{xv}{c^2}}{\sqrt{1-(v/c)^2}} = ct'.$$

De paso se obtiene la igualdad

$$y' = ct'. \tag{3.8}$$

¿Qué nos dice esta importante coincidencia de las transformaciones?

Por lo menos, que, en el fenómeno del movimiento de un punto material a lo largo de una recta, la extensión espacial x y la magnitud ct, proporcional a la duración del tiempo y con dimensión de extensión espacial, están relacionadas entre sí como coordenadas de los elementos de cierto espacio lineal bidimensional que, además, posee propiedades métricas seudoeuclídeas. Esta es una faceta esencialmente nueva en la idea general del espacio y del tiempo como formas de existencia de la materia.

Su interrelación en la interpretación clásica se limitaba a que la materia no puede moverse fuera del tiempo, lo mismo que no puede moverse fuera del espacio. La dependencia dual del movimiento de un cuerpo se expresa en forma de dependencia funcional de sus coordenadas espaciales respecto del tiempo. En particular, el movimiento de un punto material a lo largo de una recta se define totalmente por la función

$$x = F(t), \tag{3.9}$$

de la cual da una representación clara la *gráfica del movimiento* del punto material.

Como ejemplo consideremos la gráfica del movimiento de los puntos materiales O, P y O' (véase la fig. 17) respecto de dos sistemas inerciales: el OX, sin apóstrofos, (fig. 18, *a*) y el $O'X'$, con apóstrofos, (fig. 18, *b*). En el sistema con apóstrofos la barra OP está en reposo. Por eso las coordenadas x de los puntos O y P (extremos de la barra) no cambian con el tiempo:

$$x_O = 0,\ x_P = l$$

y las gráficas de estas funciones son rectas paralelas al eje de la variable t (un caso particular de la gráfica del movimiento es la gráfica del punto material en reposo). El punto material O' se mueve con la velocidad constante v respecto del sistema inercial sin apóstrofos. Por eso la coordenada x del punto O' es una función lineal

del tiempo: $x = vt$, cuya gráfica es una recta inclinada hacia el eje t. En el sistema inercial con apóstrofos $O'X'$ el punto material O' está en reposo. Por eso de gráfica de su movimiento sirve el eje de la variable t'. Por el contrario, los puntos materiales O y P se mueven respecto de $O'X'$ con la

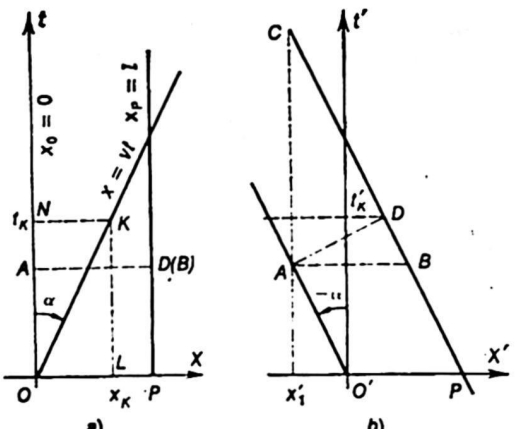


Fig. 18

velocidad constante ($-v$). Por lo que la gráfica de su movimiento está inclinada hacia eje t'. Como origen de coordenadas se ha tomado en las dos gráficas de la fig. 18 el suceso de la coincidencia de los puntos materiales O y O'.

Las gráficas examinadas, lo mismo que la gráfica de toda función (3.9), ponen de manifiesto que en el fenómeno del movimiento unidimensional de un punto material se realiza la relación entre dos magnitudes: la coordenada espacial x y el cómputo del tiempo t. No obstante, aún no puede hablarse de bidimensionalidad de este fenómeno, por cuanto en él no existe un objeto que pueda desempeñar el papel de elemento de un espacio lineal bidimensional. En la gráfica del movimiento vemos esos objetos como trozos de línea de la gráfica, pero de hecho no son más que líneas y vectores geométricos pertenecientes al plano de la figura, el cual es en realidad un espacio lineal. Pero el hecho de que a uno de los vectores básicos del plano de la figura le atribuyamos el sentido de intervalo de tiempo es una convencionalidad pura que hemos adoptado con fines ilustrativos. ¿Tiene, acaso, algún sentido físico real la magnitud consistente en la combinación lineal (en particular, la suma) de la extensión espacial y el tiempo de duración?

La duración de los intervalos de tiempo forman de por sí un espacio lineal unidimensional, en el cual se puede indicar como elemento básico un intervalo no nulo dirigido (del pasado al futuro) tomado como unidad de medida del tiempo. De imagen de este espacio lineal sirve el eje del tiempo en la gráfica del movimiento. Por eso, en la gráfica, cualesquiera segmentos paralelos al eje de la variable t tienen sentido físico de intervalos de tiempo. Por ejemplo, en la fig. 18, b, el segmento AC expresa la

duración del intervalo de tiempo entre dos *sucesos ocurridos en un mismo lugar* sobre la recta $O'X'$.

El eje espacial OX (u $O'X'$), considerado separadamente, es también un espacio lineal unidimensional, que tiene como base el vector no nulo $\mathbf{e}_1$. En la gráfica del movimiento todo segmento paralelo al eje espacial OX tiene el sentido físico de extensión espacial. Por ejemplo, en la fig. 18, *b*, el segmento AB representa la distancia entre dos *sucesos simultáneos*, igual a la longitud de la barra en movimiento OP.

Pero en la gráfica del movimiento todo segmento no paralelo a ninguno de los ejes de coordenadas carece de sentido físico. Por ejemplo, el segmento dirigido $\overline{OK}$ en la fig. 18, *a* es la suma geométrica de los segmentos $\overline{OL}$ y $\overline{ON}$

$$\overline{OK} = \overline{OL} + \overline{ON}.$$

El segmento $\overline{OL}$ corresponde a la traslación del punto material O' a lo largo del espacio unidimensional OX desde el punto O hasta el punto L; el segmento $\overline{ON}$ corresponde al intervalo de tiempo durante el cual se realiza dicha traslación, en tanto que el segmento $\overline{OK}$ no corresponde a ninguna magnitud física, ya que la suma de intervalos espaciales e intervalos de tiempo no tiene sentido. A cada punto del plano en que está dibujada la gráfica del movimiento corresponde un par de números ordenados $(x; t)$. En la figura el conjunto de estos puntos forma un espacio lineal bidimensional, el plano de la figura. Pero en la naturaleza, según las ideas de la mecánica clásica, a los pares ordenados de valores de la coordenada espacial x y del cómputo del tiempo t no corresponde espacio lineal bidimensional alguno. La ausencia de propiedades lineales en el conjunto de estos pares implica la ausencia de propiedades métricas. Por eso no existe conmensurabilidad natural entre los segmentos del eje espacial OX y los segmentos del eje del tiempo. En la gráfica del movimiento la correlación de las escalas de estos ejes se elige artificialmente partiendo de razones arbitrarias de conveniencia. La costumbre de representar en la gráfica del movimiento los ejes de las variables x y t perpendiculares entre sí, también ha sido dictada únicamente por razones de conveniencia y no se basa en las leyes de la mecánica clásica.

En general, cualesquiera relaciones bidimensionales en las gráficas del movimiento de la mecánica clásica son, en el mejor de los casos, características convencionales del movimiento. Incluso la inclinación de la gráfica hacia el eje del tiempo caracteriza la velocidad del movimiento de un modo convencional. En las gráficas de los puntos materiales en movimiento de la fig. 18, la tangente del ángulo de inclinación α hacia el eje del tiempo es igual a 0,5. Disponiendo nada más que

de este número no podemos decir nada concreto de la velocidad de los sistemas inerciales OX y $O'X'$ (sobre los ejes de las variables x y t las escalas no se han indicado adrede). La longitud del segmento AD en la fig. 18, *b* es un ejemplo de magnitud con la cual no relacionamos ni siquiera una característica convencional del movimiento. Únicamente en el caso en que las gráficas del movimiento de los puntos materiales son paralelas al eje del tiempo (gráficas en estado de reposo), la perpendicular a ellas es paralela al eje de espacios y su longitud adquiere el sentido físico de distancia entre los puntos materiales O y P (véase $AD = AB$ en la fig. 18, *a*).

Las ideas clásicas a que estamos acostumbrados del fenómeno del movimiento unidimensional de un punto material, sobre algunos de cuyos rasgos hemos llamado aquí la atención, requieren una revisión radical a la luz del hecho de que la transformación de Lorentz (3,5) es, por esencia, la transformación de coordenadas (2.81) en un espacio bidimensional seudoeuclídeo. Veremos nuevos rasgos en el fenómeno del movimiento, si para representarlo empleamos un plano seudoeuclídeo que posea las mismas propiedades lineales y métricas que sirven de base a la transformación de Lorentz. Claro está que no podemos ver ni representar al natural las propiedades métricas del plano seudoeuclídeo, pero ya sabemos soslayar esta dificultad va-

liéndonos de las relaciones matemáticas exactas y de su representación convencional (véase el capítulo 2). En cuanto a las propiedades lineales, éstas son iguales en el plano seudoeuclídeo y en el plano euclídeo propio de la figura.

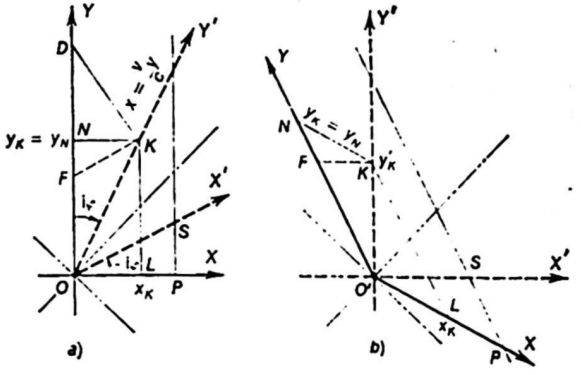


Fig. 19

Las figs. 19, *a* y *b*, por su sentido físico, son análogas a correspondientes de la fig. 18. En ellas se han representado las gráficas del movimiento de los puntos materiales O, P y O' (véase la fig. 17) respecto del sistema inercial sin apóstrofos OX (fig. 19, *a*) y respecto del sistema inercial con apóstrofos $O'X'$ (fig. 19, *b*). A diferencia de las figs. 18, las figs. 19 son imágenes del plano *seudoeuclídeo*, y en ellas sobre el eje de ordenadas se toma no el cómputo del tiempo t, sino la magnitud, proporcional a él, $y = ct$ (véase (3.6)), que

tiene dimensión de extensión espacial. En la fig. 19 se muestran las imágenes de las rectas isótropas que pasan por el origen de coordenadas del plano seudoeuclídeo.

Para poder ilustrar la ecuación del movimiento del punto material O':

$$x = vt$$

con la gráfica de la fig. 19, *a* hay que expresar la variable t mediante la variable y de la relación (3.6):

$$t = y/c.$$

En este caso obtenemos

$$x = vt = v \cdot \frac{y}{c} = \frac{v}{c} y.$$

La relación

$$\frac{x}{y} = \frac{v}{c} \qquad (3.10)$$

caracteriza la velocidad del movimiento del punto material respecto del sistema inercial OX, y, al mismo tiempo, el ángulo de inclinación de la gráfica del movimiento hacia el eje de ordenadas y en el plano seudoeuclídeo. Del triángulo OKN, con los lados ON y NK perpendiculares entre sí, hallamos la tangente del ángulo

$$\operatorname{tg}(i\varphi) = \frac{x_K}{iy_K} = -i\frac{x_K}{y_K}$$

(iy_K es la longitud del cateto ON expresada por un número imaginario, puesto

que el vector $\overrightarrow{ON}$ pertenece al sector superior del plano seudoeuclídeo). Haciendo aquí la sustitución (3.10) y teniendo en cuenta (2.56), obtenemos

$$\operatorname{tg}(i\varphi) = i \cdot \operatorname{th}\varphi = -i\frac{x_K}{y_K} = -i\frac{v}{c}, \qquad (3.11)$$

o bien

$$\operatorname{th}\varphi = -v/c.$$

Esta es la misma igualdad (3.7) que hallamos en calidad de una de las relaciones intermedias al pasar de la transformación de las coordenadas (2.81) en el plano seudoeuclídeo a la transformación de Lorentz (3.5). Pero allí obtuvimos la igualdad (3.7) de las razones de semejanza de las transformaciones, puramente formales, en tanto que ahora hemos llegado a su sentido cinemático. Resulta que la razón v/c caracteriza la magnitud del ángulo entre la gráfica del movimiento (o reposo) del punto material O, origen de coordenadas del sistema inercial sin apóstrofos, y la gráfica del movimiento del punto material O', tomado como origen de coordenadas del sistema inercial con apóstrofos (véase la fig. 17). En la igualdad (3.11), que es el producto de la igualdad (3.7) por la unidad imaginaria $i = \sqrt{-1}$, está presente la expresión explícita del ángulo $i\varphi$ en el plano seudoeuclídeo.

Pero he aquí lo más interesante: la relación (3.11) entre la velocidad v del movimiento relativo de los sistemas iner-

ciales de coordenadas y el ángulo $i\varphi$ entre sus gráficas en el plano seudoeuclídeo ya no es convencional! La transformación de coordenadas (2.81) en el plano seudoeuclídeo fue obtenida para los sistemas de coordenadas *ortonormalizadas*. Y como la transformación de Lorentz (3.5), por su esencia, expresa las mismas relaciones métricas y lineales que la transformación (2.81), el eje de la variable $ct = y$ *tiene que ser necesariamente perpendicular* (en sentido seudoeuclídeo) al eje OX. Además, en la misma naturaleza (y no sólo en el plano seudoeuclídeo tomado para construir las gráficas del movimiento) existe la conmensurabilidad métrica de las magnitudes x y $ct = y$, expresada en la transformación de Lorentz. Por eso, conociendo la magnitud del ángulo $i\varphi$, podemos calcular por la fórmula (3.11), sin condiciones arbitrarias adicionales de ninguna clase, la velocidad v, a un valor determinado de la velocidad v corresponde unívocamente una magnitud determinada del ángulo $i\varphi$. Esta objetividad de las relaciones mutuas, que antes nos figuramos convencionales, es muy significativa, ya que pone de manifiesto que forman parte de la naturaleza misma de las cosas.

La coincidencia de la transformación de Lorentz (3.5) con la transformación (2.81) de las coordenadas en el plano seudoeuclídeo permite ver que en la naturaleza tiene sentido la combinación lineal de la

extensión espacial y la magnitud ct, que caracteriza la duración temporal. El segmento dirigido $\overline{OK}$ de la gráfica del movimiento del punto material O' (véase la fig. 19, *a*) es la combinación lineal de los segmentos dirigidos $\overline{OL}$ y $\overline{ON}$:

$$\overline{OK} = \overline{OL} + \overline{ON}.$$

El segmento $\overline{OL}$ expresa la traslación del punto material O' en el espacio unidimensional OX. El segmento $\overline{ON}$ caracteriza el intervalo de tiempo invertido por el punto material en esta traslación. Pero, ¿qué sentido físico tiene el segmento $\overline{OK}$ y su longitud? Para esclarecer esto vamos a utilizar el principio de la relatividad, que afirma que el sistema inercial $O'X'$ puede tomarse como inmóvil, con la misma razón que el sistema OX.

En el sistema inercial de coordenadas $O'X'$ el punto material O' está en reposo. Por lo tanto su gráfica desempeña el papel de eje de ordenadas $O'Y'$ del plano seudoeuclídeo en la fig. 19, *b*. Como la cuenta del tiempo y de la coordenada espacial se hace en las figs. 19, *a* y 19, *b* desde un mismo suceso (la coincidencia de *los puntos materiales* O' y O (véase la fig. 17)), los orígenes de los sistemas de coordenadas bidimensionales OXY y $O'X'Y'$ representados en estas figuras, coinciden y se pueden aplicar las fórmulas (2.81) para cal-

cular las coordenadas del punto K (x_K; y_K) respecto del sistema con apóstrofos:

$$x'_K = \frac{x_K - y_K \cdot \text{th}\,\varphi}{\sqrt{1-\text{th}^2\,\varphi}}, \quad y'_K = \frac{y_K + x_K \cdot \text{th}\,\varphi}{\sqrt{1-\text{th}^2\,\varphi}}.$$

Como el punto K se encuentra en la recta

$$x = vt = v \cdot \frac{y}{c} = y\,\frac{v}{c}$$

(véase la fig. 19, *a*), sus coordenadas satisfacen la relación

$$x_K = y_K \frac{v}{c},$$

o, teniendo en cuenta (3.7),

$$x_K = -\,y_K \cdot \text{th}\varphi. \qquad (3.12)$$

Por eso obtenemos

$$x'_K = \frac{-y_K \cdot \text{th}\,\varphi + y_K \cdot \text{th}\,\varphi}{\sqrt{1-\text{th}^2\,\varphi}} = 0,$$

$$y'_K = \frac{y_K + (-y_K \cdot \text{th}\,\varphi) \cdot \text{th}\,\varphi}{\sqrt{1-\text{th}^2\,\varphi}} = y_K \frac{1-\text{th}^2\,\varphi}{\sqrt{1-\text{th}^2\,\varphi}} =$$

$$= y_K \sqrt{1-\text{th}^2\,\varphi}. \qquad (3.13)$$

Este resultado de los cálculos analíticos es bastante comprensible. El suceso K se representa por un punto en la gráfica del movimiento del punto material O' y, por eso, en el sistema de coordenadas, en que esta gráfica sirve de eje de ordenadas, la abscisa del punto K es igual a cero. En cambio, la ordenada y_K del punto K en el sistema $O'X'Y'$ caracteriza el intervalo

de tiempo que separa el suceso K del suceso representado por el origen de coordenadas. Este intervalo de tiempo, de acuerdo con (3.8), es

$$t'_K = \frac{y'_K}{c} = \frac{y_K}{c}\sqrt{1-\text{th}^2\,\varphi},$$

o, teniendo en cuenta (3.6) y (3.7),

$$t'_K = t_K \sqrt{1-(v/c)^2}. \qquad (3.14)$$

Según la transformación de Galileo (3.3), la duración del intervalo de tiempo entre dos sucesos no varía al pasar de un sistema de coordenadas inerciales a otro. En cambio, la igualdad (3.14), obtenida de la transformación de Lorentz, significa que el intervalo de tiempo entre dos sucesos tiene un valor mínimo en el sistema de coordenadas con respecto al cual estos sucesos se producen en un mismo lugar. Éste es el célebre efecto relativista de contracción de los intervalos de tiempo medidos por un reloj en movimiento.

Los segmentos del eje OY, en la fig. 19, *a*, caracterizan los intervalos de tiempo medidos por el reloj en reposo respecto del eje OX. Los segmentos del eje $O'Y'$, en la fig. 19, *b*, caracterizan los intervalos de tiempo medidos por el reloj en reposo respecto del eje $O'X'$, pero en movimiento, respecto del sistema inercial sin apóstrofos OX, con la velocidad v. Así resulta que para los sucesos representados en la

fig. 19, *a* por los puntos O y K, que se producen en lugares distintos en el sistema de coordenadas sin apóstrofos ($x_O \neq x_K$), el intervalo de tiempo t_K medido por el reloj en reposo, respecto de este sistema, es más largo que el intervalo de tiempo t'_K medido por el reloj en movimiento. La conciencia, que sólo opera con ideas clásicas, no puede conformarse con este extraño efecto, porque si el intervalo de tiempo *entre unos mismos sucesos* depende del sistema de coordenadas que se tome y la elección de éste depende de nosotros, ¿no será que se destruye con esto la dependencia objetiva del tiempo como una de las medidas del movimiento de la materia? Las figs. 19, *a* y 19, *b* permiten ver la ingenua superficialidad de esta confusión.

La cuestión es que las magnitudes $y_K = ct_K$ e $y'_K = ct'_K$ caracterizan intervalos de tiempo entre *distintos pares de sucesos*, es decir, lintervalos de tiempo esencialmente distintos! Con la magnitud y_K se define la longitud del vector $\overline{ON}$ (véase la fig. 19, *a*):

$$|\overline{ON}| = iy_K = ict_K. \qquad (3.15)$$

El punto N pertenece a la gráfica del movimiento (reposo) del punto material O e indica el estado de este punto material en el instante $t_K = t_N$. Con la magnitud y'_K se determina la longitud del vector $\overline{O'K}$ (véase la fig. 19, *b*):

$$|\overline{O'K}| = iy'_K = ict'_K. \qquad (3.16)$$

El punto K pertenece a la gráfica del movimiento (reposo) del punto material O' y representa el estado de este punto material en el instante t'_K. La existencia real en la naturaleza de la conmensurabilidad métrica entre las magnitudes x y ct, descubierta por la transformación de Lorentz, da la posibilidad de calcular la longitud del vector $\overline{OK}$, no paralelo a ningún eje de coordenadas sin apóstrofo OXY. De la relación lineal

$$\overline{OK} = \overline{OL} + \overline{ON} = x_K \mathbf{e}_1 + y_K \mathbf{e}_2$$

hallamos por la fórmula (2.22)

$$|\overline{OK}| = \sqrt{x_K^2 - y_K^2},$$

o, teniendo en cuenta (3.12),

$$|\overline{OK}| = \sqrt{(-y_K \cdot \operatorname{th}\varphi)^2 - y_K^2} =$$
$$= y_K \sqrt{\operatorname{th}^2\varphi - 1} = y_K \sqrt{-1} \cdot \sqrt{1 - \operatorname{th}^2\varphi} =$$
$$= iy_K \sqrt{1 - \operatorname{th}^2\varphi} = iy'_K = |\overline{O'K}| \qquad (3.17)$$

(aquí se han utilizado las relaciones (3.13) y (3.16)).

Así, pues, resulta que en el plano seudoeuclídeo la distancia entre el punto O, que representa el suceso de la coincidencia de los puntos materiales O y O', y el punto K, que representa otro estado del punto

material O', *no depende* del sistema de coordenadas en que se considera la gráfica del movimiento del punto material O'. ¿No es esto, acaso, una manifestación de la univocidad objetiva de las relaciones espacio-tiempo en la naturaleza? En la gráfica de la fig. 19, *b* la longitud del segmento $\overline{O'K}$ caracteriza el intervalo de tiempo entre los sucesos O' y K. Por consiguiente, en la gráfica de la fig. 19, *a* la longitud de ese segmento ¡también tiene el mismo sentido físico! Caracteriza la duración del intervalo de tiempo entre dos sucesos determinados, que no varía al cambiar el sistema de coordenadas.

Y la magnitud y_K caracteriza el intervalo de tiempo que separa otro par de sucesos: el de la coincidencia de los puntos materiales O y O', por una parte, y el del estado N del punto material O, por otra. Conociendo las coordenadas del punto N $(0; y_K)$ respecto del sistema OXY se pueden calcular, por las fórmulas (2.81), las coordenadas de este mismo punto respecto del sistema $O'X'Y'$:

$$x'_N = \frac{x_N + y_N \cdot \operatorname{th}\varphi}{\sqrt{1-\operatorname{th}^2\varphi}} = \frac{0 + y_K \cdot \operatorname{th}\varphi}{\sqrt{1-\operatorname{th}^2\varphi}} = \frac{y_K \cdot \operatorname{th}\varphi}{\sqrt{1-\operatorname{th}^2\varphi}},$$

$$y'_N = \frac{y_N + x_N \cdot \operatorname{th}\varphi}{\sqrt{1-\operatorname{th}^2\varphi}} = \frac{y_K + 0 \cdot \operatorname{th}\varphi}{\sqrt{1-\operatorname{th}^2\varphi}} = \frac{y_K}{\sqrt{1-\operatorname{th}^2\varphi}}.$$

En el sistema de coordenadas con apóstrofos $O'X'Y'$ el punto N ya no se encuentra en el eje de ordenadas $(x'_N \neq 0)$, como era de esperar, ya que el punto N representa el estado del punto material O que se mueve respecto del eje $O'X'$. Por la fórmula (2.22) hallamos la longitud del segmento $\overline{O'N}$ de la fig. 19, *b* en el sistema de coordenadas con apóstrofos:

$$|\overline{O'N}| = \sqrt{(x'_N)^2 - (y'_N)^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{y_K^2 \cdot \operatorname{th}^2\varphi}{1-\operatorname{th}^2\varphi} - \frac{y_K^2}{1-\operatorname{th}^2\varphi}} =$$

$$= y_K \sqrt{\frac{\operatorname{th}^2\varphi - 1}{1-\operatorname{th}^2\varphi}} \quad y_K \cdot \sqrt{-1} =$$

$$= iy_K = |\overline{ON}|$$

(véase (3.15)). Esta longitud coincide con la del segmento $\overline{ON}$ en la fig. 19, *a*.

Por lo tanto, sólo desde el punto de vista clásico puede parecer que la relación (3.14) expresa la ligazón entre dos valores (por el reloj en reposo y por el reloj en movimiento) de un mismo intervalo de tiempo. En realidad aquí figuran intervalos de tiempo entre dos pares de sucesos distintos $(t_N - t_O = y_K/c$ y $t_K - t_O = y'_K/c)$, y la ligazón entre estos intervalos distintos representa una simple relación trigonométrica en el plano seudoeuclídeo. En el triángulo ONK (véase la fig. 19, *a*) el lado NK es perpendicular (en sentido seudoeuclídeo)

al lado ON. La razón de la longitud del cateto ON a la longitud de la hipotenusa OK es el coseno del ángulo $\widehat{NOK} = i\varphi$:

$$\frac{|\overline{ON}|}{|\overline{OK}|} = \cos(i\varphi) = \operatorname{ch}\varphi = \frac{1}{\sqrt{1-\operatorname{th}^2\varphi}}$$

(véase (2.54) y (2.59)). De aquí obtenemos

$$|\overline{OK}| = |\overline{ON}| \cdot \sqrt{1-\operatorname{th}^2\varphi}$$

(la hipotenusa OK es más corta que el cateto ON porque $\cos(i\varphi) \geqslant 1$). Tomando en consideración (3.15), (3.16) y (3.17) se puede escribir la última igualdad en las formas siguientes:

$$iy'_K = iy_K \sqrt{1-\operatorname{th}^2\varphi},$$

$$y'_K = y_K \sqrt{1-\operatorname{th}^2\varphi}$$

(ésta es la igualdad (3.13)),

$$t'_K = t_K \sqrt{1-(v/c)^2} \quad \text{(igualdad (3.14))}.$$

Hemos llegado a la conclusión de que la longitud de la gráfica del movimiento del punto material, considerada en el plano seudoeuclídeo, caracteriza la duración del tiempo transcurrido en el sistema de coordenadas inercial respecto del cual el punto material dado se encuentra en reposo (este parámetro recibe el nombre de *tiempo propio* del punto material o del sistema de coordenadas solidario del mismo). La diferencia de los sucesos representados por los

puntos N y K en la fig. 19 se ve también claramente en las gráficas del movimiento construidas en el plano euclídeo propio ordinario (véase la fig. 18, *a*). Pero desde el punto de vista clásico la longitud del segmento OK carece de sentido físico, y el intervalo de tiempo entre los sucesos O y K sólo se puede caracterizar por la longitud de los segmentos $\overline{ON} = \overline{LK}$, paralelos al eje del tiempo. El hecho de que la mecánica clásica considere simultáneos los sucesos N y K en todos los sistemas de coordenadas, elimina el problema de la diferencia entre los intervalos de tiempo $t_K - t_O$ y $t_N - t_O$.

De un modo completamente diferente se interpreta el concepto de simultaneidad a la luz de la transformación de Lorentz. Son simultáneos los sucesos que se caracterizan por tener los mismos valores de la coordenada $y = ct$. En las gráficas del movimiento en el plano seudoeuclídeo estos sucesos se representan por puntos que se encuentran en rectas paralelas al eje OX (*líneas de simultaneidad*). Pero los sistemas de coordenadas para los cuales se han escrito las transformaciones (2.81) y (3.5) son ortonormalizados. Por eso las líneas de simultaneidad, paralelas al eje de ordenadas OX, son perpendiculares (en sentido seudoeuclídeo) al eje OY. Sabemos que las reglas de representación convencional de las propiedades métricas del plano seudoeuclídeo permiten dibujar, formando ángulo recto, uno de los pares de rectas perpendicu-

lares entre sí tomado por elección arbitraria (véase la fig. 13). Aprovechando esta posibilidad, en la fig. 19, *a* hemos dispuesto bajo ángulo recto los ejes OX y OY del sistema de coordenadas sin apóstrofos, y en la fig. 19, *b*, los ejes $O'X'$ y $O'Y'$ del sistema de coordenadas con apóstrofos. Como quiera que los puntos orígenes de las coordenadas de los sistemas bidimensionales que consideramos representan el mismo suceso de la coincidencia de los puntos materiales O y O', los sistemas de coordenadas con apóstrofos y sin ellos se pueden representar en un mismo dibujo. En la fig. 19, *a*, la gráfica del movimiento del punto material O', tomada como eje OY', pasa por el origen de coordenadas formando el ángulo $i\varphi$ con el eje OY. Por consiguiente, el eje $OX' = O'X'$, perpendicular al eje OY', deberá tener el mismo ángulo de inclinación $i\varphi$ respecto del eje OX, para ser simétrico al eje OY' respecto de la isótropa. La representación conjunta de los sistemas OXY y $OX'Y'$ en la fig. 19, *a* muestra claramente que las líneas de simultaneidad del sistema de coordenadas con apóstrofos no son paralelas a las líneas de simultaneidad del sistema de coordenadas sin apóstrofos, sino que forman con ellas un ángulo de inclinación $i\varphi$. Por eso en el sistema sin apóstrofos el suceso K es simultáneo al N, mientras que en el sistema con apóstrofos el suceso K es simultáneo al F. Lo mismo, aunque de forma algo distinta, se puede ver en la

fig. 19, *b*, en la cual los ejes perpendiculares entre sí $O'X$ y $O'Y$ del sistema de coordenadas sin apóstrofos se representan bajo ángulo obtuso.

El concepto de simultaneidad de los sucesos desempeña un papel decisivo en la interpretación del problema de la longitud de una barra en movimiento. En el sistema de coordenadas respecto del cual la barra está en reposo, las coordenadas de sus extremos no varían con el tiempo y, por lo tanto, son indiferentes los instantes en que se hagan las mediciones de las mismas. Por ejemplo, en la fig. 17 la barra OP está en reposo respecto del sistema inercial OX y la diferencia entre las coordenadas

$$x_P - x_O = l \qquad (3.18)$$

es, indudablemente, la longitud de la barra. Pero si hay que medir la longitud de la barra en *movimiento*, la diferencia entre las coordenadas de sus extremos será igual a la longitud de la barra solamente con la condición indispensable de que estas coordenadas se fijen *simultáneamente*. Por eso, si se utiliza el sistema inercial con apóstrofos $O'X'$, respecto del cual la barra OP se traslada, para expresar la longitud de la barra en forma de diferencia entre las coordenadas de sus extremos es absolutamente necesario tomar las coordenadas referidas a un mismo instante. Supongamos, por ejemplo, que éste sea el instante en que coinciden los puntos materiales O y O',

tomado como instante de referencia de los tiempos en ambos sistemas de coordenadas, con apóstrofos y sin ellos. En el sistema de coordenadas sin apóstrofos OXY el suceso inicial O (0; 0) es simultáneo al suceso representado por el punto P (x_P; 0) en la gráfica del punto material P (véase la fig. 19, *a*). En el sistema de coordenadas con apóstrofos $OX'Y'$, el mismo suceso inicial O (0; 0) es simultáneo a otro estado del punto material P, representado por el punto S (x_S; y_S) en la gráfica del movimiento. Por consiguiente, en el sistema de coordenadas con apóstrofos la longitud de la barra, en movimiento respecto de este sistema, se determina por la diferencia de las abscisas

$$x'_S - x'_O = l'. \qquad (3.19)$$

Consideremos la transformación de las coordenadas sin apóstrofos del punto S en las coordenadas con apóstrofos por medio de las fórmulas (2.81), teniendo en cuenta que $x_S = x_P = l$:

$$x'_S = \frac{x_S + y_S \cdot \operatorname{th}\varphi}{\sqrt{1-\operatorname{th}^2\varphi}} = \frac{l + y_S \cdot \operatorname{th}\varphi}{\sqrt{1-\operatorname{th}^2\varphi}},$$

$$y'_S = \frac{y_S + x_S \cdot \operatorname{th}\varphi}{\sqrt{1-\operatorname{th}^2\varphi}} = \frac{y_S + l \cdot \operatorname{th}\varphi}{\sqrt{1-\operatorname{th}^2\varphi}} = 0.$$

La igualdad $y'_S = 0$ se debe a la elección misma del punto S como punto de la gráfica del movimiento del punto material P que en el sistema de coordenadas con apóstrofos es simultáneo al suceso inicial O (0; 0)

y, por lo tanto, se encuentra en el eje OX'. Por eso, de la última igualdad hallamos

$$y_S + l \cdot \operatorname{th}\varphi = 0 \Leftrightarrow y_S = -l \cdot \operatorname{th}\varphi.$$

Sustituyendo este valor de y_S en la expresión de x'_S, obtenemos

$$x'_S = \frac{l + (-l \cdot \operatorname{th}\varphi) \cdot \operatorname{th}\varphi}{\sqrt{1-\operatorname{th}^2\varphi}} = l\,\frac{1-\operatorname{th}^2\varphi}{\sqrt{1-\operatorname{th}^2\varphi}} = l\sqrt{1-\operatorname{th}^2\varphi},$$

o, teniendo en cuenta (3.19) y (3.7),

$$l' = l\sqrt{1-\operatorname{th}^2\varphi} = l\sqrt{1-(v/c)^2}. \qquad (3.20)$$

La relación (3.20) expresa el célebre efecto relativista del acortamiento (contracción) de la barra en movimiento. Esta formulación del efecto vuelve a parecer que viola el sentido común: si la longitud de un cuerpo depende del sistema de coordenadas en que se hace la medición, ¿en qué consiste entonces la objetividad de las características espaciales de los cuerpos? Pero ese conflicto de ideas tan brusco sólo es posible en virtud de la estrechez de las ideas clásicas sobre el espacio, el tiempo y los cuerpos. En realidad, en este caso, lo mismo que en el de los intervalos de tiempo, se trata no de un conjunto de medidas de una misma extensión espacial, sino de distintas extensiones espaciales.

La longitud l es la distancia entre los puntos O (0; 0) y P (x_P; 0) del plano seudoeuclídeo y no depende del sistema de coor-

denadas en que se consideren esos puntos. El origen de coordenadas O (0; 0) en los sistemas de coordenadas OXY y $OX'Y'$ es común; el punto P (x_P; 0) tiene en el sistema con apóstrofos las coordenadas siguientes:

$$x'_P = \frac{x_P + y_P \cdot \operatorname{th}\varphi}{\sqrt{1 - \operatorname{th}^2\varphi}} = \frac{l + 0 \cdot \operatorname{th}\varphi}{\sqrt{1 - \operatorname{th}^2\varphi}} = \frac{l}{\sqrt{1 - \operatorname{th}^2\varphi}},$$

$$y'_P = \frac{y_P + x_P \cdot \operatorname{th}\varphi}{\sqrt{1 - \operatorname{th}^2\varphi}} = \frac{0 + l \cdot \operatorname{th}\varphi}{\sqrt{1 - \operatorname{th}^2\varphi}} = \frac{l \cdot \operatorname{th}\varphi}{\sqrt{1 - \operatorname{th}^2\varphi}}.$$

La longitud del vector

$$\overline{OP} = x'_P \mathbf{e}'_1 + y'_P \mathbf{e}'_2,$$

expresada por medio de las coordenadas con apóstrofos, es

$$|\overline{OP}| = \sqrt{(x'_P)^2 - (y'_P)^2} = \sqrt{\frac{l^2}{1 - \operatorname{th}^2\varphi} - \frac{l^2 \cdot \operatorname{th}^2\varphi}{1 - \operatorname{th}^2\varphi}} = l\sqrt{\frac{1 - \operatorname{th}^2\varphi}{1 - \operatorname{th}^2\varphi}} = l,$$

lo que coincide con la longitud de este mismo vector expresada por medio de las coordenadas sin apóstrofos (véase (3.18)).

La longitud l' es la distancia entre los puntos O (0; 0) y S (x_S; y_S) del plano seudoeuclídeo. Tomando en consideración que $x_S = x_P = l$ e $y_S = -l \cdot \operatorname{th}\varphi$, como se

demostró al deducir la relación (3.20), hallamos la longitud del vector

$$\overline{OS} = x_S \mathbf{e}_1 + y_S \mathbf{e}_2,$$

expresada por medio de las coordenadas sin apóstrofos:

$$|\overline{OS}| = \sqrt{x_S^2 - y_S^2} = \sqrt{l^2 - l^2 \cdot \operatorname{th}^2\varphi} = l\sqrt{1 - \operatorname{th}^2\varphi} = l'.$$

Esa longitud coincide con la de este mismo vector expresada mediante las coordenadas con apóstrofos (véase (3.19)). En la fórmula (3.20) se ve con facilidad la relación trigonométrica entre la longitud del cateto y la de la hipotenusa en el triángulo OPS (véase la fig. 19, *a*):

$$\frac{|\overline{OP}|}{|\overline{OS}|} = \frac{l}{l'} = \cos(i\varphi) = \operatorname{ch}\varphi = \frac{1}{\sqrt{1 - \operatorname{th}^2\varphi}}.$$

§ 17. Líneas de universo

Herman Minkowski hizo una aportación decisiva a la comprensión de que la transformación de Lorentz para las coordenadas espaciales y la cuenta del tiempo expresa relaciones geométricas en un espacio con propiedades métricas específicas. Este tipo de espacio se llama *espacio de Minkowski*. Limitándonos a dos variables, de las cuales una caracteriza la extensión en el espacio perceptible por los sentidos, y otra, la duración temporal, separamos del espacio

de Minkowski un espacio bidimensional o plano isomorfo seudoeuclídeo.

Al reconocer el espacio y el tiempo como formas de existencia de la materia, en la realidad nos hemos acostumbrado a tratar solamente con la configuración espacial de los objetos materiales. Quizá porque así precisamente nos los dibujan las percepciones sensoriales. Pero en la interpretación geométrica propuesta por Minkowski se destaca también claramente el papel conformador del tiempo. Las gráficas del movimiento de los puntos materiales consideradas en el plano seudoeuclídeo adquieren un valor determinante que antes les era impropio. Una importancia primordial adquirió el hecho de que la distancia entre dos puntos de las gráficas resultó ser una magnitud invariante, es decir, independiente de la elección del sistema de coordenadas. Al mismo tiempo, magnitudes que en la mecánica clásica eran consideradas objetivas, resultaron ser dependientes de las condiciones en que se observan y miden. Este cambio de papeles es especialmente evidente en el problema de la longitud del cuerpo.

Si lo que percibimos como cuerpo-barra es un objeto material primario, su longitud debe ser una invariante de la cual dependen todos los demás parámetros del proceso del movimiento del cuerpo, entre ellos los parámetros de las gráficas del movimiento de los puntos materiales de dicho cuerpo. Pero en realidad ocurre lo contrario. La

invariancia o bien la objetividad es una característica propia de los puntos y las líneas que desempeñan el papel de gráficas del movimiento. En la fig. 19 se indican solamente las gráficas del movimiento de los puntos materiales extremos de la barra OP. Sin embargo, toda la barra está llena de puntos materiales y cada uno de ellos origina una gráfica del movimiento en forma de una recta situada entre las ON y PS y paralela a ellas. Por eso debe considerarse la franja continua entre las rectas ON y PS en la fig. 19. De cómo se hallen situados, respecto de esta franja, los sistemas de coordenadas ortonormalizados que se elijan depende el comportamiento del cuerpo-barra que percibimos: la barra está en reposo respecto del sistema inercial cuyo eje espacial, en la gráfica de la fig. 19, es perpendicular (en sentido seudoeuclídeo) a las rectas ON, PS (eje OX), y la barra se mueve respecto del sistema inercial cuyo eje espacial no es perpendicular a la franja (eje OX'). Pero lo principal es que la anchura de la franja medida en la dirección del eje de abscisas la percibamos como longitud de la barra: la anchura de la franja en la sección *perpendicular* OP es la longitud l de la barra *en reposo* (véase (3.18)), y la anchura de esta misma franja en la sección inclinada OS es la longitud l' de la barra en movimiento (véase (3.19)). A esto hay que añadir que el ángulo $i\varphi$ entre el eje de ordenadas del sistema y la dirección de las

líneas de las gráficas en la franja *ONPS* define unívocamente la velocidad v del movimiento de la barra con relación al respectivo eje espacial. ¿Qué es aquí en realidad lo primario y qué lo secundario? Desde el punto de vista de la interpretación geométrica de Minkowski, que está de acuerdo con la transformación de Lorentz, lo primario es lo que, por costumbre, consideramos gráfica del movimiento del objeto (cuerpo) perceptible por los sentidos, y lo secundario, el objeto mismo percibido por éstos. A las gráficas del movimiento de los puntos materiales consideradas en el plano seudoeuclídeo, las llamó Minkowski *líneas de universo*, y a los puntos, por separado, de las líneas, *puntos de universo*. El concepto de punto de universo corresponde al concepto de suceso.

Aquí conviene decir que este modo de expresarse no es en plena medida justo. Llamando líneas de universo a las *gráficas* de los puntos materiales, rendimos homenaje a las ideas, mantenidas por la costumbre, sobre el carácter primario de los puntos materiales y secundario de sus gráficas. Una línea de universo no es sólo una línea en el dibujo, el cual no es más que la representación de un objeto realmente existente en la naturaleza. De lo contrario, ¿cómo podrían tener fuerza de leyes de la naturaleza las relaciones geométricas entre las líneas de universo y sus puntos? El hecho de que a las características geométricas de las

líneas de universo les sea propio un grado más alto de objetividad (invariancia) que a las relaciones espaciales y temporales entre los puntos materiales clásicos, nos obliga a considerar las líneas de universo como formaciones materiales existentes objetivamente. En virtud de ciertas causas, de que se hablará más adelante, no podemos percibir visualmente una línea de universo en su extensión real, sino que en cada instante percibimos sólo puntos aislados de la misma (puntos de universo) en forma de puntos materiales. Pero la extensión de la línea de universo se manifiesta en que las longitudes de determinados trozos de esta línea determinan la duración de los intervalos de tiempo.

El lector debe saber que este planteamiento tan radical del problema de la materialidad de las líneas de universo no es una opinión generalmente aceptada en la ciencia. Desde luego la importancia objetiva de las líneas de universo y de sus características geométricas es ya indudable. Pero parece más en consonancia con el espíritu de prudencia y amplitud de los juicios científicos, considerar las líneas de universo como la expresión inmaterial de las leyes profundamente naturales que rigen el universo percibido por los sentidos. En este caso es un obstáculo importante el modo de interpretar aquellas partes de las líneas de universo que se refieren al tiempo futuro. Las partes del pasado, está claro, expresan

los estados ya realizados del universo material, pero ¿qué expresan las del futuro? Reconocerlas como objetos materiales realmente existentes en la naturaleza significaría reconocer que todos los estados futuros del universo están predeterminados desde el punto de vista mecánico. No es posible negar por completo la posibilidad de la predeterminación, ya que sin ella carecerían de fundamento todas las predicciones científicas, por ejemplo, la predicción de las posiciones de los cuerpos celestes. Pero una cosa es reconocer la predeterminación como conjunto de consecuencias naturales de los estados pretéritos y presentes del universo, sobre las cuales viene al caso decir que, podemos, dentro de determinados límites, ejercer influencia, y otra, totalmente distinta, es determinar rígidamente el futuro por medio de líneas de universo materiales existentes de antemano, cuando ese futuro aún no ha llegado a nosotros.

A esto se puede objetar que la opinión según la cual las partes futuras de una línea de universo están tan determinadas como las pasadas, es ni más ni menos que la consecuencia de considerar la línea de universo como representación gráfica de la ley del movimiento expresada por la función

$$x = F(t) = F(y/c) = f(y). \quad (3.21)$$

Tenemos la costumbre de figurarnos el movimiento, representado en una gráfica,

como ya realizado totalmente o como sujeto inevitablemente a realizarse de esa forma, y no nos detenemos a pensar en el hecho de que al proceso real de transcurso del tiempo corresponde un modo gradual o progresivo de «trazar» la gráfica de la función (3.21). En cada instante actual se ha «trazado», se ha puesto de manifiesto, se ha realizado, sólo aquella parte de la gráfica que corresponde al pasado, pero aún no existe, no se ha realizado la parte correspondiente al futuro. Este seguimiento de la manifestación gradual de la gráfica es innecesario en muchos casos, en los cuales se entiende la gráfica precisamente como representación convencional del movimiento. Pero dicho seguimiento adquiere especial importancia cuando se trata de comprender la línea de universo como objeto con existencia real en la naturaleza. *Las líneas de universo se encuentran en proceso de desarrollo.* Existen ya, se han manifestado ya, en aquellas de sus partes que se refieren al pasado, y todavía no existen, no se han revelado en la parte del futuro. El límite de la parte ya revelada de la línea de universo es el límite entre el pasado y el futuro, es el mismo «instante actual» que continuamente pasa del pretérito al futuro. De este modo vemos en el proceso de transcurso del tiempo, que abarca a todo el mundo material, un proceso de crecimiento, de prolongación, de revelación de las líneas de universo o *proceso de revelación o manifestación universal.*

El autor de estas líneas asume totalmente la responsabilidad de la introducción del concepto y del término «proceso universal de manifestación o revelación», que él no ha encontrado en otros trabajos científicos. Sin embargo, con esto no se propone en realidad ninguna hipótesis nueva, sino que únicamente se traduce, al lenguaje propuesto por Minkowski del cuadro del universo, el hecho indiscutible de que todos los objetos materiales (como quiera que nos los figuremos) participan, sin excepción, en el proceso continuo del transcurso del tiempo. La idea, a que estamos acostumbrados, de que la cuenta del tiempo t tiene la propiedad natural de aumentar, toma ahora una nueva forma: es una propiedad de la naturaleza el aumento continuo de la ordenada $y = ct$, la cual, como ya vimos, caracteriza la longitud de las líneas de universo.

No es difícil admitir el paso, puramente formal, de la variable t a la variable proporcional a ella y, sin tocar nuestras ideas acerca de la estructura del universo. Pero es el caso que la relación (3.6)

$$y = ct$$

tiene un profundo sentido físico. Es ella precisamente la que hace posible el paso del modelo matemático abstracto (espacio seudoeuclídeo) a la ley real de la naturaleza (transformación de Lorentz), obligando a reconocer que en la naturaleza existen las relaciones lineales y métricas del espacio

seudoeuclídeo. La relación (3.6) descifra el tiempo de duración de la existencia de los objetos materiales, como su extensión en el espacio seudoeuclídeo.

Desde este punto de vista se explica con extraordinaria sencillez la célebre «paradoja de los mellizos». Supongamos que los segmentos ON y OK en la fig. 19, *a* representan las líneas de universo de dos hermanos gemelos, uno de los cuales permanece en el Sistema Solar y, en proporciones galácticas, se puede considerar en reposo en el sistema de coordenadas inercial heliocéntrico, y el otro emprende un viaje interestelar con la velocidad

$$v = ic \cdot \operatorname{tg}(i\varphi)$$

(véase (3.11)). Después de alejarse en el espacio perceptible sensorialmente hasta una distancia x_K (expresada por el segmento NK, paralelo al eje OX), el hermano cosmonauta regresa al Sistema Solar, lo cual se expresa por el segmento KD de la línea de universo. El punto de universo O representa en la fig. 19, *a* el suceso de la separación de los hermanos, y el punto de universo D, el suceso de su reencuentro. El intervalo de tiempo, vivido por el hermano que se quedó en la Tierra, entre la separación y el reencuentro, viene expresado por la longitud del segmento $OD = ON + ND$ de la línea de universo. Y el intervalo de tiempo vivido por el cosmonauta entre la separación y el reencuentro se determina por

la longitud de la línea de universo quebrada OKD. Como el segmento KN es perpendicular (en sentido seudoeuclídeo) a la recta OD, el segmento OK es más corto que su proyección ON (puesto que $\cos(\widehat{NOK}) = \cos(i\varphi) > 1$) y el segmento KD es más corto que su propia proyección ND. Por consiguiente, el camino recorrido desde el punto de universo O hasta el punto de universo D por la recta OD es más largo que el recorrido por la quebrada OKD. Esto significa que el hermano cosmonauta será, en el instante del reencuentro, más joven que el hermano que se quedó en la Tierra.

En este ejemplo se ve bien cómo la idea del proceso universal de revelación elimina la apariencia de conflicto entre la materialidad de las líneas de universo y la posibilidad de influir sobre los sucesos futuros. La intervención de la actividad humana cambia varias veces la dirección de la línea de universo de uno de los hermanos durante su viaje cósmico. La capacidad del hombre para influir en la disposición mutua de los puntos materiales (cuerpos) y, de este modo, dirigir la marcha de los sucesos futuros equivale a su capacidad para cambiar las direcciones de las líneas de universo en desarrollo. Claro está que para confirmar o negar la concepción de la materialidad de las líneas de universo hay que tener en cuenta la enorme riqueza ya alcanzada de conocimientos sobre la naturaleza. Pero

incluso la discusión del problema a nivel macroscópico es suficiente para introducir importantes rasgos de claridad en la visión del mundo con la cual ha de concluir sus búsquedas la física del siglo XX. Al concepto de materialidad de las líneas de universo sólo vamos a darle el sentido suficientemente amplio de que existen independientemente de nuestra conciencia y son descubiertas por nuestras percepciones sensoriales en forma de objetos, que desde hace mucho tiempo se llaman puntos materiales.

§ 18. El fenómeno de la propagación de la luz

Las gráficas del movimiento rectilíneo uniforme de los puntos materiales las construimos en el plano seudoeuclídeo de tal modo que resultaran ser rectas pertenecientes a los sectores imaginarios del plano. Por eso, en la exposición aquí adoptada, las rectas de universo son rectas no isótropas de los sectores imaginarios. Si dos rectas de universo forman un ángulo $i\varphi$, a ellas corresponden puntos materiales que se mueven, el uno respecto del otro, con la velocidad

$$v = ic \cdot \operatorname{tg}(i\varphi) \qquad (3.22)$$

(véase (3.11)). Como depende de nuestra voluntad cuál de estos puntos materiales se toma como fijo, es decir, con cuál de ellos se liga el sistema inercial de coordenadas

en el espacio unidimensional perceptible sensorialmente, también de nuestra voluntad depende cuál de las rectas de universo se toma como eje OY del sistema bidimensional OXY en el plano seudoeuclídeo. Pero he aquí lo más interesante. La equivalencia de todos los sistemas inerciales de coordenadas en el espacio perceptible por los sentidos constituye el postulado de la relatividad, intuido como generalización de la experiencia por Galileo y ampliado sobre la base de los datos experimentales por los creadores de la teoría de la relatividad: Lorentz, Poincaré y Einstein. Pero la equivalencia de los sistemas de coordenadas ortonormalizados en el plano seudoeuclídeo es un hecho geométrico teórico. De este modo, las ideas del papel primario de las líneas de universo y del carácter seudoeuclídeo del espacio universal real tienen, además de otras, la ventaja, no poco importante, de que de ellas se infiere como simple corolario lógico el postulado de la relatividad, que es uno de los puntales de la física.

Es más, de estas ideas se deduce también como corolario el segundo postulado de Einstein, sobre la constancia de la velocidad de la luz en el vacío. En efecto, como se dijo antes (véase la pág. 150), toda recta no isótropa del plano seudoeuclídeo forma un ángulo infinitamente grande con cada una de las isótropas contiguas. Sustituyendo en la fórmula (3.22) $i\varphi$ por sus valores infinitos $i\varphi = \pm i\infty$, obtenemos

$$v = ic \cdot \operatorname{tg}(\pm i\infty) = ic \cdot i \cdot \operatorname{th}(\pm\infty) = \\ = -c \cdot \operatorname{th}(\pm\infty) = \mp c$$

(puesto que $\operatorname{th}\varphi \to \pm 1$ cuando $\varphi \to \pm\infty$; véase (2.52) y la fig. 15). Esto significa que si la recta de universo la percibimos en forma de punto material, la recta isótropa debemos percibirla como un objeto que se mueve respecto de dicho punto con la velocidad c, es decir, como una señal luminosa. Ante nosotros tenemos, pues, tres hallazgos valiosos.

Primero, resulta que la transmisión de las señales luminosas está relacionada con las rectas isótropas en el plano seudoeuclídeo.

Segundo, se pone de manifiesto el secreto de la constancia de la velocidad de la luz. Todas las rectas de universo pueden desempeñar de un modo equivalente el papel de eje de ordenadas del sistema de coordenadas del plano seudoeuclídeo, y todas ellas forman ángulos infinitamente grandes con las isótropas. Por eso los puntos materiales correspondientes a las rectas de universo pueden desempeñar de un modo equivalente el papel de origen del sistema inercial de coordenadas y, respecto de cada uno de ellos, la señal luminosa se moverá con la misma velocidad c.

Tercero, queda claro por qué ningún cuerpo (punto material) puede moverse con la

velocidad de la luz o a velocidad aún mayor. Como las líneas de universo se distinguen por su dirección, en este sentido el conjunto de líneas de universo posibles, incluso en los límites de un plano, es infinitamente rico, ya que a partir de cualquier recta de universo se pueden medir en ambos lados una infinidad de magnitudes de ángulos, y a cada valor finito de un ángulo corresponderá la dirección de una línea de universo. Pero las líneas de universo no salen de los sectores imaginarios. El papel de las rectas isótropas como límites de los sectores se manifiesta en que ellas establecen el valor máximo de la velocidad de los puntos materiales.

De acuerdo con los datos experimentales y los puntos de vista teóricos, no sólo la luz visible, sino toda acción electromagnética perceptible con aparatos se propaga en el vacío con la velocidad c. De aquí se sigue la conclusión de que en el espacio seudoeuclídeo universal *los efectos electromagnéticos sólo pueden ser transmitidos de un punto de universo a otro por las isótropas.* En cuanto este principio se formula, su justeza se revela ante nosotros de un modo cada vez más convincente. Desde luego, las líneas isótropas son precisamente las que poseen mayores ventajas geométricas para transmitir las acciones a gran distancia, ya que llas distancias entre dos puntos cualesquiera que se encuentren sobre una misma isótropa son nulas!

Supongamos que en la fig. 20 el eje OY coincide con la recta de universo del observador, en tanto que la recta PF, que es paralela a la primera, viene representando la

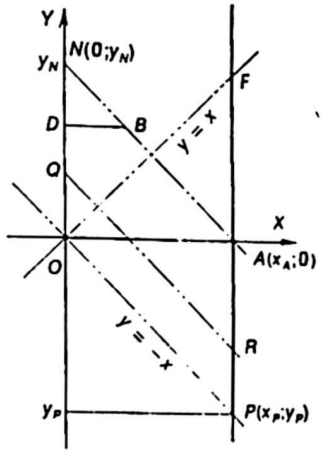


Fig. 20

línea de universo de una estrella. Tomamos como origen de coordenadas O el punto de universo correspondiente al instante actual del observador. La isótropa $y = -x$ que pasa por este punto de universo corta la línea de universo de la estrella en el punto P. La longitud del segmento OP es igual a cero y el observador que se encuentra en el punto O puede percibir la acción electromagnética que parte del punto de universo P de la estrella. El punto R

de la línea de universo de la estrella está desplazado hacia el futuro respecto del punto P. El segmento OR no es isótropo (su longitud no es nula) y por él no se transmite la acción electromagnética. Por eso el observador que se encuentra en el punto de universo O no puede percibir el punto de universo R. Pero la marcha del proceso universal de revelación hace que el observador se traslade, a lo largo de su recta de universo, al punto Q, que se halla en la misma isótropa que el punto R, y entonces el punto de universo R se hace perceptible. En cambio, el punto de universo P ya no podrá ser percibido por el observador, que se encontrará en el punto Q, ya que el segmento PQ no es isótropo. Durante el proceso universal de revelación el punto de universo del observador irá pasando sucesivamente por todos los puntos del segmento OQ y el observador irá teniendo la posibilidad de percibir, con la correspondiente secuencia, los puntos de universo de la estrella en el segmento PR.

De este modo las percepciones visuales causadas por la acción electromagnética, nos permiten en cada instante «captar» sólo un punto de la línea de universo, por lo que vemos siempre el objeto material no como una línea, sino como un punto. Trasladándonos, durante el transcurso del proceso de revelación, a lo largo de nuestra línea de universo, vemos no un punto único de otra línea de universo, sino una sucesión de puntos cambiantes y, en esta continuación o prolongación de las percepciones, los puntos aislados nos parecen no objetos independientes, sino estados distintos de un mismo objeto cuya existencia, lo mismo que nuestra percepción, transcurre en el tiempo. Este objeto recibe el nombre de *punto material*. El concepto de punto material es contradictorio, en él lo real se combina con lo ilusorio. Es real el hecho de que percibimos la línea de universo en forma de punto, o mejor dicho, de sucesión de puntos que se sustituyen unos a otros. También es real el hecho de que esos puntos representan estados de un mismo objeto material. Pero es ilusorio el hecho de que este objeto material lo consideremos un punto y no una línea, y que la extensión espacial de la línea la consideremos como algo distinto cualitativamente del espacio, o sea, como tiempo.

Los procedimientos de descripción de los fenómenos observados se elaboran por los hombres antes de conocerse la esencia de los mismos. El tiempo es difícil de comprender, pero es imposible no darse cuenta de que transcurre, y los procedimientos para medir el tiempo se establecieron mucho antes de que se concibiera la idea de la relación entre los intervalos de tiempo y la longitud de un tipo determinado de segmentos en el espacio seudoeuclídeo. Para medir el tiempo se utiliza el movimiento periódico de puntos materiales: la traslación diaria y anual de los astros en el firmamento, el

paso de un líquido o de arena de un recipiente a otro, las oscilaciones de los péndulos y de los balancines. En cada caso cambia la disposición mutua de determinados puntos materiales en el espacio perceptible

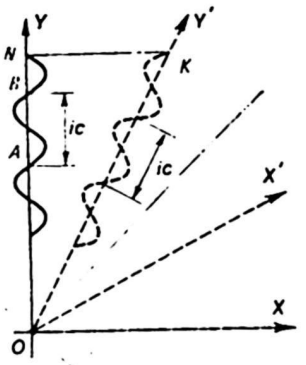


Fig. 21

sensorialmente, de manera que una misma posición se repite regularmente.

Supongamos, por ejemplo, que un punto material oscila de tal forma a lo largo de la recta OX que su coordenada espacial varía con el tiempo según la ley sinusoidal

$$x = l \cdot \operatorname{sen} \omega t = l \cdot \operatorname{sen} 2\pi t,$$

en la que l es la amplitud de las oscilaciones, y $\omega = 2\pi s^{-1}$, la frecuencia cíclica. En este caso cualquier posición del punto material se repite al cabo de la unidad de tiempo (segundo). La gráfica del movimiento de este punto material considerada en el

plano seudoeuclídeo y, por consiguiente, la propia línea de universo, tendrá la forma de la curva periódica definida por la ecuación

$$x = l \cdot \operatorname{sen}\left(2\pi \frac{y}{c}\right) = l \cdot \operatorname{sen}\left(2\pi \frac{iy}{ic}\right), \qquad (3.23)$$

cuya longitud de onda es ic (fig. 21). En efecto, si en la línea de universo (3.23) se toma el punto A $(x_A; y_A)$, desplazándonos a lo largo del eje OY una distancia ic, hallamos sobre esta misma línea de universo el punto B, que tiene la misma abscisa

$$x_B = l \cdot \operatorname{sen}\left(2\pi \frac{iy_A + ic}{ic}\right) =$$

$$= l \cdot \operatorname{sen}\left(2\pi \frac{iy_A}{ic} + 2\pi\right) =$$

$$= l \cdot \operatorname{sen}\left(2\pi \frac{iy_A}{ic}\right) = x_A.$$

La línea de universo (3.23) no podemos verla en toda su extensión y menos aún volver a sus puntos pasados y medir la longitud de onda directamente, pero señalando dos posiciones espaciales consecutivas iguales del punto material, tomamos el intervalo de tiempo entre estos sucesos como unidad de medida del tiempo. Así, sin sospechar esto, los relojes eran empleados por los hombres como instrumentos para medir las longitudes de las líneas de universo. Decir que ha transcurrido una unidad de tiempo equivale a decir que el proceso universal de revelación ha avanzado a lo largo

de la línea de universo dada una distancia ic. El número t de unidades de tiempo entre dos sucesos ocurridos en el mismo lugar es igual al número de segmentos de longitud ic que hay entre los dos puntos de universo, separados por la distancia iy:

$$t = \frac{iy}{ic}, \text{ o bien } iy = (ic)\, t. \qquad (3.24)$$

Adviértase la inexactitud de la terminología que suele emplearse en las descripciones del efecto relativista de la contracción de los intervalos de tiempo (véase (3.14)). En uno de sus primeros trabajos sobre la teoría de la relatividad, A. Einstein interpretó este efecto como «retraso de la marcha del reloj»: «... un reloj que se mueve con la velocidad v respecto de un sistema de referencia determinado, va en este sistema $1 : \sqrt{1 - (v/c)^2}$ veces más despacio que cuando (el mismo reloj) está en reposo respecto de ese mismo sistema de referencia» [17]. En el libro «Evolución de la física», escrito por Einstein en colaboración con L. Infeld en 1938 y cuya tercera edición apareció en 1954, hay expresiones del mismo sentido. Por ejemplo: «Cada sistema de coordenadas debe tener su propio reloj, que se encuentre en reposo en él, ya que el movimiento cambia el ritmo de los relojes» [18]. Este modo de expresarse penetró hasta en el «Curso de física teórica» de Landáu y Lifshitz. En su «Teoría del campo» se lee: «... el tiempo propio de un

objeto en movimiento es siempre menor que el intervalo de tiempo correspondiente en el sistema fijo. En otras palabras, los relojes que se mueven marchan más despacio que los fijos» [19]. Al lector de estas expresiones le es difícil evitar la idea errónea según la cual parece que la disminución («contracción») del intervalo de tiempo se debe a que cada segundo, medido por un reloj en movimiento, dura más que un segundo medido por un reloj en reposo. ¡Como si en un mismo intervalo de tiempo cupiesen distintas cantidades de segundos «correctos», medidos por los relojes en reposo, y de segundos «retardados», «lentos», medidos por los relojes en movimiento! Pero está claro que si la unidad de medida estuviera sometida a cambios, no podría cumplir sus funciones y ella misma tendría que ser comparada con algo constante.

Es evidente que por ritmo de un reloj se entiende la frecuencia del proceso oscilatorio que en él se emplea o el período del mismo. Al período τ del reloj, expresado en unidades de tiempo, corresponde la longitud de onda $i\lambda$ de la línea de universo oscilante, de acuerdo con (3.24):

$$i\lambda = (ic)\, \tau.$$

La forma, y con ella la longitud de onda, de la línea de universo es característica objetiva de esta formación material, independiente del sistema de coordenadas que se elija. Para comparar los interva-

los de tiempo en distintos sistemas inerciales de coordenadas hay que disponer de relojes sincronizados, es decir, de líneas de universo periódicas cuyas longitudes de onda sean iguales (o conserven una relación constante). Si en los sistemas inerciales, correspondientes a los sistemas de coordenadas ortonormalizados OXY y $OX'Y'$ sobre el plano seudoeuclídeo (véase la fig. 21), se utilizan relojes con igual período, por ejemplo, $\tau = 1$, éstos indican que en el segmento ON del eje OY cabe un número t, de ondas de longitud ic, mayor que el número t , de las mismas ondas, que cabe en el segmento OK. La relación entre estos números será igual a la razón de las longitudes de los segmentos ON y OK:

$$\frac{t}{t'} = \frac{|\overline{ON}|}{|\overline{OK}|} = \cos(i\varphi) = \operatorname{ch}\varphi = \\ = \frac{1}{\sqrt{1-\operatorname{th}^2\varphi}} = \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}}$$

en completo acuerdo con las propiedades métricas del plano seudoeuclídeo ($\cos(i\varphi) \geqslant 1$). Precisamente la igualdad del período (ritmo) de los relojes en movimiento y en reposo es la que permite poner de manifiesto experimentalmente la diferencia entre los intervalos de tiempo t y t'.

La magnitud ic desempeña en la relación (3.24) el papel de *coeficiente de conversión* de una unidad de medida a otra. El empleo de distintas unidades para medir una misma

magnitud física no es nada extraño. Por ejemplo, antes de ser comprendida la naturaleza del calor, la cantidad de calor se medía en calorías. Una vez que se descubrió el equivalente mecánico del calor, fue posible medir el calor en unidades de trabajo. Ahora el calor y el trabajo mecánico se miden en julios. De un modo análogo se pueden reducir los intervalos de tiempo a longitudes de segmentos del sector imaginario del plano euclídeo, si se conoce el número que expresa la longitud correspondiente a la unidad de tiempo, es decir, el coeficiente de conversión ic.

Ya que con una regla graduada no podemos medir las regiones pasadas de la línea de universo, es imposible determinar directamente el coeficiente ic. Pero las propiedades especiales de las rectas isótropas y el fenómeno físico, relacionado con ellas, de la acción electromagnética, dan la posibilidad de medir este coeficiente de un modo indirecto. En realidad fue medido antes de que fueran desarrolladas las premisas que permitieron ver su sentido verdadero. En la fig. 20 el punto de universo O, del observador, y el punto de universo P, de la estrella, están separados en el espacio seudoeuclídeo por el segmento isótropo OP, cuya longitud es nula. Pero desde el punto de vista clásico los sucesos designados por esos puntos están separados en el espacio perceptible sensorialmente por una distancia igual a la diferencia entre las abscisas

de los puntos, es decir, por la longitud del segmento

$$x_P - x_O = x_A - x_O = |\overline{OA}|.$$

El observador, que identifica el espacio universal con el perceptible sensorialmente, considera que el foco de luz dista de él la longitud $|\overline{OA}| = x_P$. Sin embargo, el punto de universo P no es al mismo tiempo O del observador. La diferencia entre las ordenadas de estos puntos corres ponde al intervalo de tiempo

$$t_P = \frac{i(y_P - y_O)}{ic} = \frac{y_P - 0}{c} = \frac{y_R}{c}.$$

El observador piensa con razón que ve el foco de luz tal como era en el pasado, es decir, t_P unidades de tiempo antes del instante de su percepción. Basándose en la experiencia de sus propias traslaciones y de las traslaciones de otros puntos materiales en el espacio perceptible sensorialmente, el observador interpreta la transmisión de la acción electromagnética como un proceso de movimiento de la señal, que recorre la distancia x_P en el tiempo t_P y determina la velocidad del movimiento de la señal

$$V = x_P/t_P.$$

El resultado de estas mediciones está predeterminado por las relaciones geométricas en el plano seudoeuclídeo. Las coordenadas del punto de universo P satisfacen la

ecuación de la isótropa $y = -x$, sobre la cual se encuentra el punto:

$$y_P = -x_P.$$

Por consiguiente,

$$V = \frac{x_P}{t_P} = \frac{x_P}{y_P/c} = \frac{x_P}{-x_P} \cdot c = -c.$$

En la magnitud de la velocidad de la señal luminosa se ha puesto de manifiesto simplemente el coeficiente c, que en forma de número imaginario ic caracteriza la relación (3.24) entre las dos unidades de medida del tiempo.

Lo que en el espacio perceptible sensorialmente parece un proceso de propagación de la señal luminosa, se descifra en el espacio seudoeuclídeo como un proceso de aproximación del punto de universo del observador a la correspondiente recta isótropa. En la línea de universo PF de la estrella, el punto A, simultáneo del punto de universo O del observador, no puede ser percibido por éste, porque el segmento OA no es isótropo. El punto A puede ser percibido por el observador cuando el proceso de revelación traslada a éste a punto N, que se encuentra en la misma isótropa que el punto A. El punto de universo O está separado del punto de universo N por el segmento ON, cuya longitud es $|\overline{ON}| = iy_N$. Este es el camino que tiene que recorrer en realidad el punto de universo del observador, durante

el proceso de revelación, hasta que se encuentra con la isótropa AN. Además de esto se puede considerar la distancia que, por la perpendicular a la recta de universo del observador, separa a éste de la isótropa AN. Para el punto O esta distancia es igual a la longitud del segmento $|\overline{OA}| = x_A = x_P$. La recta AN se define en el sistema de coordenadas OXY por la ecuación

$$y = -x + y_N.$$

Sustituyendo en ella las coordenadas del punto A, hallamos

$$y_A = -x_A + y_N \Leftrightarrow 0 = -x_A + y_N \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x_A = y_N.$$

A medida que disminuye la distancia desde el punto de universo del observador hasta la isótropa AN a lo largo del eje OY, disminuye también la distancia entre el observador y la isótropa medida en la dirección del eje OX. Por ejemplo, en el punto de universo D estas distancias serán respectivamente iguales a los segmentos DN y DB. La razón de estas distancias permanece constante durante el proceso de revelación y es igual a la tangente del ángulo entre la isótropa y el eje OY:

$$\frac{|\overline{DB}|}{|\overline{DN}|} = \frac{|\overline{OA}|}{|\overline{ON}|} = \frac{x_A}{iy_N} = \frac{y_N}{iy_N} =$$
$$= -i = \operatorname{tg}(\overline{ON}, \overline{AN}). \qquad (3.25)$$

Si la longitud del segmento de línea de universo se mide en unidades de tiempo:

$$|\overline{ON}| = iy_N = (ic)\, t_N,$$

la relación (3.25) toma la forma y el sentido de la velocidad de propagación de la luz:

$$\frac{|\overline{OA}|}{|\overline{ON}|} = \frac{x_A}{(ic)\, t_N} = -i \Rightarrow \frac{x_A}{t_N} = -i\,(ic) = c. \qquad (3.26)$$

La relación (3.26) no es más que la traducción de la relación geométrica (3.25) al lenguaje de las representaciones clásicas sobre el espacio y el tiempo. El sentido de estas relaciones se manifiesta con especial claridad suponiendo que la longitud del segmento DN de la línea de universo del observador es la correspondiente a la unidad de tiempo, es decir, $|\overline{DN}| = ic$. En este caso, de (3.25), hallamos

$$|\overline{DB}| = -i \cdot |\overline{DN}| = -i\,(ic) = c.$$

De este modo se puede sustituir la medición del segmento $\overline{DN}$ (o del proporcional a él $\overline{ON} = t \cdot \overline{DN}$), por la medición del segmento $\overline{DB}$ (o del proporcional a él $\overline{OA} = t \cdot \overline{DB}$), que representa la distancia en el espacio perceptible sensorialmente. Las mediciones modernas más exactas (véase [20]) dan el valor

$$c = (299\,792\,458 \pm 1{,}2) \text{ m/s}.$$

Sería un error lógico hablar de la velocidad del proceso de revelación partiendo de la base de que el transcurso de cada unidad de tiempo significa un avance, igual a la distancia *ic*, de dicho proceso a lo largo de la línea de universo. Al concepto de velocidad de un punto material corresponde en la interpretación geométrica de Minkowski la razón de las longitudes de dos segmentos *perpendiculares entre sí*: uno de ellos pertenece a un sector real del plano seudoeuclídeo y representa una extensión en el espacio perceptible sensorialmente, y el otro pertenece a un sector imaginario y determina la duración del intervalo de tiempo. Esta razón caracteriza la inclinación de la línea de universo respecto del eje *OY*. En las igualdades

$$\frac{iy}{t} = ic, \quad \frac{y}{t} = c$$

(véanse (3.6) y (3.24)), dicha razón no tiene lugar. En ellas el intervalo de tiempo se compara no con el segmento del sector real, sino con el segmento del sector imaginario que determina este mismo intervalo de tiepmo. La posible confusión se debe al hecho de que la magnitud medida en unidades de tiempo resultó ser, por su esencia, una extensión espacial. Antes con la razón de los intervalos de espacio a los intervalos de tiempo sólo tropezábamos en los fenómenos de movimiento de puntos materiales. Al chocar con un fenómeno de otro tipo, en el cual una relación análoga tiene otro

sentido geométrico y físico, tenemos que hacer un esfuerzo para librarnos del poder de las ideas tradicionales y ver detrás de esta forma conocida un nuevo contenido. El intervalo de tiempo *t* no tiene una determinación cuantitativa independiente, con la cual sea posible relacionar la longitud de un segmento del eje de ordenadas. La razón de esta longitud al intervalo de tiempo expresa en realidad la razón de la longitud a sí misma. Aquí puede hablarse de relación entre distintas unidades de medida (metros y segundos imaginarios) de una misma magnitud física, pero no de velocidad. El coeficiente *c* en las relaciones (3.6) y (3.24) tiene dimensión de velocidad, pero no tiene el sentido físico de velocidad. Esa misma dimensión la tiene el coeficiente de conversión de una unidad en otra: *ic* unidades de longitud equivalen a la unidad de tiempo. El proceso universal de revelación es un fenómeno cualitativamente distinto del fenómeno del movimiento de los puntos materiales. *El concepto de velocidad es inaplicable al proceso universal de revelación*, es este mismo proceso el que genera el fenómeno de los puntos materiales y de la velocidad de los mismos. El fenómeno del movimiento de los puntos materiales se parece, por su naturaleza geométrica, al fenómeno de la propagación de una señal luminosa. Tanto en aquél como en éste se trata de la percepción de objetos físicos que tienen forma de líneas, de universo o isó-

tropas. Por eso el coeficiente c adquiere el sentido de velocidad, si figura en la descripción del fenómeno de la propagación de la luz.

Tanto de las ideas clásicas del universo, como del modelo de universo propuesto por Minkowski, se sigue que la percepción visual, por principio, sólo puede descubrirnos los aspectos *pretéritos* del mundo. En la vida ordinaria no nos damos cuenta de eso a causa del enorme valor (en comparación con el tamaño de la Tierra) de la velocidad de la luz. Nos parece que todos los cuerpos que alcanza nuestra vista pasan por su instante actual al mismo tiempo que nosotros. Pero en realidad se requiere un determinado intervalo de tiempo, incluso técnicamente medible, para la propagación de la señal luminosa a una distancia de varios metros o centímetros. Si las letras de este texto se encuentran a 30 cm de distancia del ojo del lector, éste ve dicho texto tal como era una milmillonésima de segundo antes:

$$0{,}3 \text{ m}: (3 \cdot 10^8) \text{ m/s} = 10^{-9} \text{ s}.$$

La técnica moderna permite medir intervalos de tiempo cien veces menores. Y si se utiliza la unidad de tiempo que se emplea en la física nuclear (10^{-24} s), resulta que, en tal escala, el texto del libro que leemos lo vemos «desde un pasado lejano», separado del instante actual del lector por mil billones de unidades atómicas de tiempo. Este ejemplo con cambio de escala sirve para subrayar que, *en principio*, sólo vemos el pasado por muy próximo que éste sea.

La profunda diferencia filosófica entre la visión clásica del universo y la visión de éste según Minkowski consiste en cómo se resuelve el problema de la existencia del pasado. Si el espacio universal coincide con el sensorialmente perceptible, en él sólo hay lugar para los sucesos del instante actual. Sólo de estos sucesos estamos acostumbrados a hablar como de existentes en realidad. Los sucesos pasados los consideramos inexistentes, incluso cuando los cuerpos que participaron en ellos están ante nuestros ojos. Y si los cuerpos no se conservan, la inexistencia del pasado nos parece indiscutible. Existió pero ya no existe. Al aceptar el modelo clásico de universo utilizamos, por así decirlo, un «criterio tridimensional de la existencia», según el cual sólo existe el presente, en tanto que el pasado, lo mismo que el futuro, no existe, ya que para él no hay lugar en el espacio universal. ¡Mas sólo vemos siempre el pasado! Es decir, vemos lo que ya no existe en el mundo. La solución de esta paradoja la encomendaba la física clásica al éter universal, o sea, al medio en el cual se propagan las oscilaciones electromagnéticas. Los estados pretéritos de los cuerpos no existen, pero las imágenes impresas en las oscilaciones electromagnéticas excitadas por ellos se conservan cuidadosamente en el éter uni-

versal y son capaces de alcanzar al observador incluso al cabo de años y de millares de millones de años. Así «nos llega la luz de las estrellas muertas». La búsqueda de este medio misterioso, presente en todas partes sin dejar de ser imperceptible, condujo la física a la teoría de la relatividad.

En el universo de Minkowski hay lugar tanto para los estados presentes de los objetos materiales como para los pasados. En él *existe el pasado*, pero no en el sentido del «criterio tridimensional de la existencia», no en el «instante actual», sino en el sentido del «criterio cuatridimensional de la existencia»: existe lo que tiene lugar, se ha manifestado, se ha materializado en el espacio seudoeuclídeo universal. Las percepciones visuales nos descubren lo que en el mundo existe en realidad, pero no todo, sino sólo lo que se encuentra en las líneas isótropas que pasan por nuestro punto de universo. En esas líneas isótropas no hay ni un solo punto de universo pasado de nuestra línea de universo propia y, por eso, no vemos nuestros estados pretéritos. En las líneas isótropas, que pasan por nosotros, tampoco hay puntos de las líneas de universo contiguas, que tienen la misma coordenada temporal que nosotros en cualquier sistema de coordenadas, por lo cual no podemos ver los estados simultáneos a nosotros de otros puntos materiales.

Hasta ahora hemos dirigido nuestra mirada a lo largo de las isótropas sólo hacia el

pasado. Pero por el punto de universo O del observador pasa, en la fig. 20, además de la isótropa OP, la isótropa OF, que corta en el punto F la prolongación de la recta de universo PA de la estrella. La ordenada del punto F corresponde a un instante posterior, por el reloj del observador a su instante actual en el punto O. ¿Quiere esto decir que puede verse el estado futuro de la estrella? La condición geométrica para que así sea se cumple: la longitud del segmento OF de la isótropa es nula. Pero ni nuestra experiencia cotidiana ni los experimentos científicos dan pruebas de que la acción electromagnética pueda traer información del futuro. Con esto se confirma la idea acerca del proceso de revelación que se realiza en el universo. Por las isótropas se puede percibir la acción de aquellos puntos de las líneas de universo que ya se han revelado, realizado, formado. Pero en aquellas regiones del espacio seudoeuclídeo hasta las cuales aún no ha llegado el proceso universal de revelación, no puede verse nada, ya que allí no se han formado todavía los puntos de universo, es decir, las fuentes de la acción electromagnética.

§ 19. Vector masa

Las relaciones cinemáticas de la teoría de la relatividad son sorprendentes e incomprensibles desde el punto de vista clásico, que considera el universo como un sistema

de puntos materiales sumergidos en un espacio tridimensional euclídeo propio. Pero esas mismas relaciones adquieren colorido de naturalidad y evidencia si el universo nos lo figuramos como un sistema de líneas de universo de Minkowski en un espacio seudoeuclídeo (por ahora vamos a limitarnos a secciones bidimensionales de ese espacio). Si para desempeñar el papel de objeto material primario de la mecánica se propone, en vez del punto material, la línea de universo, habrá que reconsiderar también las interacciones entre los puntos materiales como interacciones entre las líneas de universo. En primer lugar, la principal característica dinámica del punto material, la masa, deberá entenderse como medida de la inercia de la línea de universo.

Una línea de universo *recta* se percibe en un sistema inercial de coordenadas en forma de punto material que se mueve a velocidad *constante* o que, en particular, está en reposo (véase (3.11)). En una línea curva la dirección de cada punto se determina como la dirección de la tangente. Como esta dirección varía a lo largo de la línea, la línea de universo *curva* se percibe, de acuerdo con (3.11), en forma de punto material que se mueve con velocidad *variable* v, es decir, con aceleración. Por eso, si la masa inerte del *punto material* es la medida en su docilidad para cambiar de velocidad, con arreglo a la línea de universo deberá entenderse la masa como medida de la facilidad (docilidad) de la línea para cambiar de dirección, es decir, para curvarse. Cuanto más difícil sea curvar la línea de universo, tanto mayor será la masa que la caracteriza. A la causa de la aceleración de un punto material le damos el nombre de fuerza. Por lo visto, en el sentido de Minkowski, la fuerza debe entenderse como causa de la torcedura de la línea de universo, como característica cuantitativa de la acción torcedora de la línea.

Supongamos que una línea de universo recta estuvo sometida a una acción torcedora que después cesó. Una vez que cesa la acción torcedora, la línea de universo se formará (manifestará) de nuevo como recta, pero ahora tendrá otra dirección. Se plantea la pregunta, ¿hay alguna diferencia en las características dinámicas de las dos partes rectilíneas indicadas de la línea de universo (anterior a la acción torcedora y posterior a ella)? Estas características pueden ser iguales en el sentido de que la inercia (docilidad para curvarse) de la línea de universo es igual en todas sus partes. Pero, por otro lado, no puede olvidarse la evidente diferencia en el estado de las partes: si para cambiar la dirección de la línea de universo fue necesaria una acción dinámica, ¿cómo es posible considerar idénticos dinámicamente los estados inicial y final? Ambos aspectos (la constancia y la variabilidad de la característica de la línea de universo) pueden hacerse coincidir en la idea de masa como una magnitud vectorial

en el espacio seudoeuclídeo: la dirección del vector masa coincide con la dirección del crecimiento de la línea de universo, es decir, con la dirección de la tangente a la línea en cada uno de sus puntos, y el módulo del vector masa caracteriza la inercia de la línea de universo, su grado de docilidad a las acciones torcedoras. Cambiar la dirección de una línea de universo significa cambiar la dirección del vector masa conservando su módulo.

Está claro que las razones aquí expuestas no constituyen aún de por sí una base suficiente para sostener la idea de vector masa. Esas razones intervienen como conjetura que puede ser fructuosa, pero que requiere la comprobación detallada de todo el conjunto de hechos experimentales establecidos rigurosamente. Ilustraremos esa comprobación con una serie de ejemplos característicos.

Si la masa es una magnitud vectorial en el espacio seudoeuclídeo bidimensional, estará sometida a sus propiedades *lineales y métricas*. En primer lugar, el vector masa **m** debe descomponerse según la base del espacio:

$$\mathbf{m} = \mu_1 \mathbf{e}_1 + \mu_2 \mathbf{e}_2. \qquad (3.27)$$

Como el vector masa **m** es colinear de la tangente a la línea de universo y tiene la dirección del crecimiento de ésta, pertenece al sector superior del plano seudoeuclídeo, es decir, las coordenadas del vector deben

satisfacer las relaciones (véase la pág. 128)

$$\mu_1^2 - \mu_2^2 < 0, \ \mu_2 > 0. \qquad (3.28)$$

El módulo del vector masa vendrá expresado por un número imaginario, para el cual introducimos la designación

$$|\mathbf{m}| = \sqrt{\mu_1^2 - \mu_2^2} = \sqrt{(-1)(\mu_2^2 - \mu_1^2)} = i\sqrt{\mu_2^2 - \mu_1^2} = im_0. \qquad (3.29)$$

en la que

$$m_0 = \sqrt{\mu_2^2 - \mu_1^2} \qquad (3.30)$$

es el parámetro real. Al pasar de la base ortonormalizada $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ a la base ortonormalizada $\mathbf{e}_1'$, $\mathbf{e}_2'$ cambian los coeficientes en la descomposición del vector masa **m** según la base

$$\mathbf{m} = \mu_1' \mathbf{e}_1' + \mu_2' \mathbf{e}_2', \qquad (3.31)$$

y su expresión por medio de las coordenadas anteriores (sin apóstrofos) del vector se definirá por las mismas fórmulas, (2.80) y (2.81), que las de las coordenadas del radio vector:

$$\begin{aligned} \mu_1' &= \mu_1 \cdot \operatorname{ch}\varphi + \mu_2 \cdot \operatorname{sh}\varphi = \frac{\mu_1 + \mu_2 \cdot \operatorname{th}\varphi}{\sqrt{1 - \operatorname{th}^2\varphi}}, \\ \mu_2' &= \mu_1 \cdot \operatorname{sh}\varphi + \mu_2 \cdot \operatorname{ch}\varphi = \frac{\mu_2 + \mu_1 \cdot \operatorname{th}\varphi}{\sqrt{1 - \operatorname{th}^2\varphi}}. \end{aligned} \qquad (3.32)$$

Consideremos el vector masa **m** en un sistema de coordenadas ortonormalizado

OXY del plano seudoeuclídeo tal, que el eje OY sea paralelo a m y esté dirigido en el mismo sentido que éste (fig. 22). Entonces obtenemos las siguientes expresiones para la descomposición del vector

$$\mathbf{m} = \mu_1\mathbf{e}_1 + \mu_2\mathbf{e}_2 = 0\cdot\mathbf{e}_1 + \mu_2\mathbf{e}_2 = \mu_2\mathbf{e}_2 \tag{3.33}$$

y para su módulo

$$|\mathbf{m}| = im_0 = i\sqrt{\mu_2^2 - 0^2} = i\mu_2.$$

En este caso la ordenada μ_2 del vector coincide con el parámetro real m_0, lo que

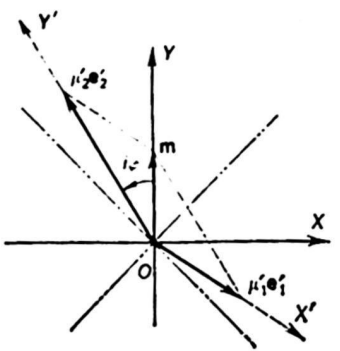


Fig. 22

permite interpretar con claridad el sentido físico de ambas magnitudes. Como el vector masa m representado en la fig. 22 tiene la dirección de la tangente a la línea de universo en cierto punto de ésta, la parte de la línea en las proximidades de este punto es paralela al eje OY y se percibe en el espacio unidimensional del eje OX (del sistema de coordenadas solidario de él) en forma de punto material fijo. La masa de este punto material, como medida de su inercia, corresponde al módulo im_0 del vector m, como medida de la inercia de la línea de universo (véase (3.29)). Por eso el parámetro real m_0 merece ser llamado *masa del punto material en reposo* o, abreviadamente, *masa en reposo*. De este modo, las coordenadas del vector masa en la descomposición (3.33) tienen los valores siguientes:

$$\mu_1 = 0,\ \mu_2 = m_0. \tag{3.34}$$

En el sistema de coordenadas con apóstrofos $OX'Y'$, fig. 22, el vector masa m forma con el eje de ordenadas OY' el ángulo $i\varphi$. La parte de la línea de universo, caracterizada por el vector m, tiene esa misma dirección respecto de OY' y es percibida en el sistema inercial unidimensional de coordenadas OX' en forma de punto material que se mueve con la velocidad

$$v = ic\cdot\mathrm{tg}\ (i\varphi) = -c\cdot\mathrm{th}\ \varphi$$

(véase 3,11)). Calculamos, por las fórmulas (3.32), las coordenadas del vector m respecto del sistema de coordenadas con apóstrofos $OX'Y'$. Al hacerlo, vamos a utilizar

las igualdades (3.34) y (3.7):

$$\mu_1' = 0 \cdot \operatorname{ch}\varphi + m_0 \cdot \operatorname{sh}\varphi = m_0 \cdot \operatorname{sh}\varphi = \frac{m_0 \cdot \operatorname{th}\varphi}{\sqrt{1-\operatorname{th}^2\varphi}} = \frac{-m_0 v}{c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \quad (3.35)$$

$$\mu_2' = 0 \cdot \operatorname{sh}\varphi + m_0 \cdot \operatorname{ch}\varphi = m_0 \cdot \operatorname{ch}\varphi = \frac{m_0}{\sqrt{1-\operatorname{th}^2\varphi}} = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}. \quad (3.36)$$

La relación (3.36) coincide con el célebre efecto del aumento de la masa en movimiento, descubierto experimentalmente por W. Kauffmann [16] y explicado por la teoría de la relatividad. Este efecto consiste en que la masa de un punto material, que en reposo es m_0, aumenta, cuando el punto se mueve con la velocidad v, hasta la magnitud

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}. \quad (3.37)$$

La comparación de las igualdades (3.37) y (3.36) da la posibilidad de comprender el aumento de la masa en movimiento como efecto geométrico de la proyección ortogonal del vector m sobre el eje OY'. En efecto, la componente del vector m en la dirección del eje OY' es el vector $\mu_2' e_2'$ (véase la

fig. 22), y el módulo de esta componente es

$$|\mu_2' e_2'| = |\mu_2'| \cdot |e_2'| = i\mu_2' = i\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}. \quad (3.38)$$

En esencia, esto es suficiente para justificar el concepto de vector masa, ya que de la fórmula (3.37) se infieren todas las relaciones dinámicas de la teoría especial de la relatividad, confirmadas sólidamente por los experimentos. No obstante, vamos a examinar algunas de estas relaciones en la interpretación geométrica.

Calculemos la diferencia entre el módulo (3.29) del vector masa m y el módulo (3.38) de la componente de este vector a lo largo del eje OY' (véase 3.36))

$$|\mu_2' e_2'| - |\mathbf{m}| = i\mu_2' - im_0 = im_0 \cdot \operatorname{ch}\varphi - im_0 = im_0(\operatorname{ch}\varphi - 1). \quad (3.39)$$

Esta relación se puede escribir en términos de las magnitudes que se observan de las masas en reposo y en movimiento y de la velocidad de movimiento (véase (3.37)):

$$\Delta\mu_2 = \mu_2' - m_0 = m - m_0 = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - m_0 = m_0\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - 1\right). \quad (3.40)$$

Si la velocidad v del punto material es suficientemente pequeña en comparación con

la velocidad de la luz $\left(\frac{v}{c} \ll 1\right)$, se puede utilizar la igualdad aproximada

$$\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \approx 1 + \left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{v^2}{c^2}\right) = 1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{v^2}{c^2}.$$

Entonces la diferencia (3.40) entre la masa en movimiento y la masa en reposo toma la forma

$$\Delta\mu_2 = m - m_0 \approx m_0\left(1+\frac{1}{2}\cdot\frac{v^2}{c^2}-1\right) = \frac{m_0 v^2}{2}\cdot\frac{1}{c^2}.$$

La magnitud

$$\frac{m_0 v^2}{2} = E_K$$

se conoce en mecánica como energía cinética del punto material. Por eso, la igualdad (3.40) adquiere el sentido siguiente:

$$\Delta\mu_2 \approx \frac{E_K}{c^2}, \text{ o bien } E_K \approx c^2\cdot\Delta\mu_2, \quad (3.41)$$

la energía cinética del punto material en movimiento es proporcional al incremento de la masa.

La relación (3.41) ha sido obtenida como aproximada, ya que sólo se han tenido en cuenta dos términos de la descomposición de la función $\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-0,5}$ en serie de Taylor. Pero la expresión clásica de la energía cinética también es correcta solamente cuando se trata de velocidades de movimiento no muy grandes y pueden despreciarse los efectos relativistas. La igualdad aproximada (3.41) nos ayudó a hallar la fórmula exacta de la energía cinética

$$E_K = m_0 c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}-1\right) \quad (3.42)$$

y en ella apreciar la ley universal de la naturaleza

$$E_K = c^2\cdot\Delta\mu_2, \quad (3.43)$$

que A. Einstein expresó con las palabras: «la masa de un cuerpo es la medida de la energía contenida en él» [22]. La igualdad (3.43) ha sido confirmada experimentalmente con un alto grado de exactitud. Es más, ha resultado que no sólo el exceso de la masa en movimiento sobre la masa en reposo ($\Delta\mu_2 = \mu_2' - m_0 = m - m_0$) tiene contenido energético, sino que la misma masa m_0 puede manifestarse parcial o totalmente en forma de energía. Así, en las reacciones nucleares se libera energía que se encuentra en estado ligado en forma de masa en reposo de los núcleos precursores o, al contrario, a expensas de la energía de las partículas que interaccionan se forman núcleos con mayor masa en reposo. Cuando un electrón y un positrón se aniquilan, sus masas en reposo desaparecen por completo

y se generan cuantos de radiación electromagnética que poseen una cantidad de energía equivalente [23]. Los físicos han llegado a la conclusión de que toda la masa de un cuerpo, uncluida su masa en reposo, viene determinada por la energía contenida en él [24], según la ley

$$m = \mu_2' = \frac{E}{c^2}. \qquad (3.44)$$

Volvamos ahora a la expresión (3.35) de la primera coordenada del vector masa. La coordenada μ_1' determina el módulo de la componente $\mu_1' e_1'$ del vector m en la dirección del eje OX' (véase la fig. 22). Este módulo se expresa con un número real, puesto que el vector $\mu_1' e_1'$ pertenece a un sector real del plano seudoeuclídeo:

$$|\mu_1' e_1'| = |\mu_1'| \cdot |e_1'| = |\mu_1'| \cdot 1 = \\ = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \cdot \left| \frac{v}{c} \right|. \qquad (3.45)$$

Si la segunda coordenada del vector masa sólo puede ser positiva (véase (3.28)) y tiene el valor *mínimo*, igual a la masa en reposo, la primera coordenada, en cambio, puede ser positiva, negativa y nula. En la expresión de la coordenada μ_1' salta a la vista una magnitud física bien conocida: el producto de la masa por la velocidad, llamada cantidad de movimiento o impulso del punto material. En sentido clásico el impulso es

$m_0 v = p_0$, y en sentido relativista, es decir, teniendo en cuenta la dependencia de la masa respecto de la velocidad, el impulso es (véanse (3.37) y (3.36))

$$p = mv = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \cdot v = \mu_2' v. \qquad (3.46)$$

Por lo que la primera coordenada del vector masa (véanse (3.35) y (3.36)) se puede expresar en la forma

$$\mu_1' = -\frac{\mu_2' v}{c} = -\frac{p}{c}. \qquad (3.47)$$

Es natural que en la proyección del vector masa sobre el eje de abscisas, que percibimos en forma de extensión espacial, figure el impulso, ya que el vector masa está dirigido según la tangente a la línea de universo y la inclinación de esa tangente, respecto del eje de ordenadas en el espacio seudoeuclídeo, se manifiesta en el espacio perceptible sensorialmente como velocidad del punto material respecto del eje de abscisas. Considerando el fenómeno del movimiento solamente en los aspectos geométrico y cinemático, destacamos en él la dirección y la velocidad. Sin embargo, en la naturaleza se mueven objetos *materiales*, y la característica física más general de un objeto material es que tiene masa. Lo que está dividido en nuestra conciencia es único en la naturaleza. En el espacio universal

seudoeuclídeo el crecimiento de una línea de universo (su dirección e inercia) está caracterizado por el vector masa, y en el espacio perceptible sensorialmente corresponde a esto el movimiento del punto material, que se caracteriza por el impulso. Pero lo mismo que el vector masa se determina en el espacio seudoeuclídeo bidimensional por sus proyecciones sobre ambos ejes de coordenadas, el movimiento de un punto material se caracteriza por dos magnitudes: el impulso y la energía.

En la primera mitad del siglo XVIII se produjo una gran discusión acerca de cuál era la medida verdadera del movimiento de un cuerpo: el producto de su masa por la velocidad, como pensaba Descartes y sus seguidores, o el producto de la masa por el cuadrado de la velocidad, punto de vista que mantenía Leibniz. La división, más tarde establecida, entre los conceptos de impulso mv y energía cinética $mv^2/2$ fue siendo comprendida por las nuevas generaciones de físicos durante el proceso de la enseñanza, y el problema de la dualidad de la medida del movimiento dejó de preocupar a las mentes. Sin embargo, habría que sorprenderse más tarde, cuando en la teoría de la relatividad fue descubierta la profunda unidad dialéctica de la energía y el impulso. En la mecánica relativista el impulso y la energía total del punto material se consideran como proyecciones del vector energía-impulso sobre los

ejes de un sistema de coordenadas ortonormalizado en el espacio universal seudoeuclídeo [9].

El término «vector energía-impulso» expresa claramente la admirable relación que existe entre estos dos importantes conceptos de la mecánica clásica, no obstante, no es en plena medida exacto, ya que las proyecciones de este vector sobre los ejes de coordenadas de un espacio perceptible por lo ssentidos representan no al impulso como tal, sino a una magnitud proporcional al impulso. Si a la proyección del vector sobre el eje de ordenadas ($E = mc^2$) se le da un sentido puramente energético, su proyección sobre el eje de abscisas será igual a pc (véanse (3.44) y (3.47)). Por eso es preferible a veces no hablar del vector energía-impulso, sino del vector cuatridimensional impulso (4-impulso) [3], cuyas proyecciones sobre los ejes de coordenadas del espacio perceptible sensorialmente representan un impulso y la proyección sobre el eje perpendicular a los mismos representa la magnitud E/c, en la que E es la energía total. En opinión del autor de este libro, para definir el modelo de universo de Minkowski es más apropiado el concepto de vector masa de la línea de universo. Este término no se utiliza en la literatura científica, a pesar de que en esencia expresa la misma relación que los términos generalmente aceptados. El producto del vector masa por el coeficiente c el 4-vector impulso, y el producto del vector

masa por el coeficiente c^2 es el vector energía-impulso en su expresión energética. Metodológicamente es preferible ver en la energía y el impulso manifestaciones de la misma naturaleza (vector masa), que deducir de la energía y el impulso, como dos entes distintos, el nuevo concepto sintetizador energía-impulso. Además, la toma en consideración del carácter vectorial de la masa permite dar gran claridad a otros problemas de la teoría física, justificando así la predicción de Minkowski: «... creo que las leyes físicas podrían hallar su expresión más perfecta como relaciones entre las líneas de universo» [1].

El gran principio de las ciencias naturales del período clásico —la ley de conservación de la masa— tuvo que ser revisado después de descubrirse el efecto del aumento de la masa de los cuerpos en movimiento. En la mecánica clásica la masa, como medida de la inercia del cuerpo, tenía un sentido único: el de coeficiente de proporcionalidad entre la aceleración recibida por el cuerpo y la fuerza que sobre él actúa. En el modelo de universo de Minkowski se puede hablar de masa en diferentes aspectos: 1) vector masa $\mathbf{m}$; 2) módulo del vector masa $|\mathbf{m}| = im_0$, y 3) proyección de este vector sobre el eje, según el cual se toma la magnitud ct proporcional al tiempo. A esta proyección corresponde precisamente la idea clásica de masa como coeficiente de proporcionalidad entre la fuerza y la aceleración. De su

constancia sólo puede hablarse ya aproximadamente, cuando las velocidades del movimiento relativo son pequeñas.

El modelo de universo de Minkowski permite ver en la primera ley de la mecánica de Newton la *ley de la conservación del vector masa*. Como, según la ley de la inercia, la velocidad de todo punto material que no experimenta influencias exteriores no varía, la línea de universo correspondiente a dicho punto es una recta. Esto significa que, por lo menos, se conserva la *dirección* del vector masa. El módulo del vector masa se manifiesta en forma de masa en reposo del punto material (véase (3.29)). Las mejores pruebas de su conservación las ofrecen las partículas elementales. A menudo se observan en el movimiento con velocidades sublumínicas, con las cuales la variación de la masa es bastante apreciable. No obstante, el cálculo por la fórmula (3.37):

$$m_0 = m \sqrt{1-(v/c)^2},$$

en la que m es la masa de la partícula en movimiento, conduce invariablemente a un mismo valor de la masa en reposo, parámetro característico de cada partícula elemental. De esta forma, es fundado suponer que *en ausencia de influencias exteriores sobre la línea de universo su vector masa (dirección y módulo) permanece invariable*. Los corolarios que se infieren del principio de conservación del vector masa también confirman esta invariancia.

En la mecánica clásica todo cuerpo se puede considerar como un sistema de puntos materiales. En el modelo de universo de Minkowski a esta forma de ver el cuerpo corresponde un sistema de líneas de universo. Es pues natural considerar el vector masa de este sistema como la suma de los vectores masa de las líneas de universo que forman el sistema. Si el sistema como un todo único no experimenta influencias exteriores, su vector masa resultante permanece constante aunque los vectores masa de algunas de las líneas de universo varíen a causa de interacciones dentro del sistema.

Examinemos un sistema aislado de dos rectas de universo que se aproximan durante la marcha del proceso de revelación y, después de chocar, confluyen en una sola línea de universo. Supongamos que antes del choque las líneas de universo se caracterizaban por los vectores masa m y l. Tomando el punto de universo del choque como origen de coordenadas O, dirigimos el eje OY colinearmente al vector masa m (fig. 23). En este caso la recta que tiene este vector masa será percibida en el sistema inercial de coordenadas OX como un punto material fijo con masa en reposo m_0. La otra recta de universo será percibida en ese mismo sistema inercial en forma de punto material, con masa en reposo l_0, que se mueve con la velocidad

$$v = (ic)\cdot \mathrm{tg}\,(i\alpha + i\beta) = -c\cdot \mathrm{th}\,(\alpha+\beta).$$

Como quiera que el vector masa resultante de un sistema aislado de líneas de universo no varía cuando éstas chocan, la línea de universo unificadora, formada como resultado de la colisión, será una recta y tendrá

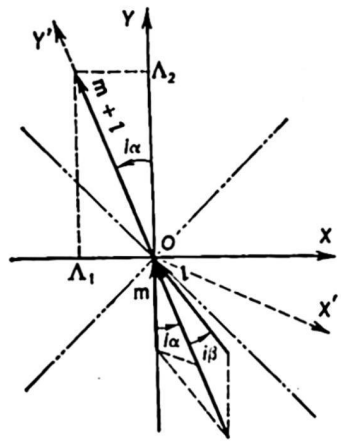


Fig. 23

la dirección del vector m + l. Formará con el eje OY el ángulo $i\alpha$ y se percibirá en forma de punto material unificado que se mueve con la velocidad (véase (3.11))

$$V = (ic)\cdot \mathrm{tg}\,(i\alpha) = -c\cdot \mathrm{th}\,\alpha. \qquad (3.48)$$

Este choque de puntos materiales se dice que es *totalmente inelástico*. Escribamos las descomposiciones de todos los vectores masa considerados, según la base e_1, e_2 del sistema

de coordenadas OXY:

$$\mathbf{m} = \mu_1 \mathbf{e}_1 + \mu_2 \mathbf{e}_2 = 0 \cdot \mathbf{e}_1 + m_0 \mathbf{e}_2 = m_0 \mathbf{e}_2,$$
$$\mathbf{l} = \lambda_1 \mathbf{e}_1 + \lambda_2 \mathbf{e}_2,$$
$$\mathbf{m} + \mathbf{l} = \Lambda_1 \mathbf{e}_1 + \Lambda_2 \mathbf{e}_2 = \lambda_1 \mathbf{e}_1 + (m_0 + \lambda_2)\, \mathbf{e}_2.$$

El ángulo $i\alpha$ entre el vector masa resultante $\mathbf{m} + \mathbf{l}$ y el eje OY se determina por la relación

$$\operatorname{tg}(i\alpha) = \frac{\Lambda_1}{i\Lambda_2} = \frac{\lambda_1}{i(m_0 + \lambda_2)} = -i \frac{\lambda_1}{m_0 + \lambda_2} = i \cdot \operatorname{th} \alpha,$$

o bien

$$\operatorname{th} \alpha = -\frac{\lambda_1}{m_0 + \lambda_2}.$$

Sustituyendo esta expresión en (3.48) hallamos la velocidad total de los puntos materiales después del choque:

$$V = c \frac{\lambda_1}{m_0 + \lambda_2} = \frac{c \cdot \dfrac{-l_0 v}{c\sqrt{1 - v^2/c^2}}}{m_0 + \dfrac{l_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}} = \frac{-l_0 v}{m_0 \sqrt{1 - v^2/c^2} + l_0}. \qquad (3.49)$$

Aquí las coordenadas del vector masa $\mathbf{l}$ se han expresado por medio de la masa en reposo l_0 y de la velocidad v del punto material, con ayuda de las relaciones evi-

dentes

$$\lambda_1 = l_0 \cdot \operatorname{sh}(\alpha + \beta) = \frac{l_0 \cdot \operatorname{th}(\alpha + \beta)}{\sqrt{1 - \operatorname{th}^2(\alpha + \beta)}} = \frac{l_0 (-v/c)}{\sqrt{1 - (v/c)^2}},$$

$$\lambda_2 = l_0 \cdot \operatorname{ch}(\alpha + \beta) = \frac{l_0}{\sqrt{1 - \operatorname{th}^2(\alpha + \beta)}} = \frac{l_0}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}.$$

Si $v \ll c$ obtenemos la aproximación clásica de la fórmula (3.49):

$$|V| \approx \frac{l_0 |v|}{m_0 + l_0}.$$

Calculamos el módulo del vector masa resultante y, por consiguiente, la masa en reposo del punto material unificado:

$$|\mathbf{m} + \mathbf{l}| = lM_0 = \sqrt{\lambda_1^2 - (m_0 + \lambda_2)^2} = i\sqrt{(m_0 + \lambda_2)^2 - \lambda_1^2},$$
$$M_0 = \sqrt{(m_0 + \lambda_2)^2 - \lambda_1^2} = \sqrt{m_0^2 + (\lambda_2^2 - \lambda_1^2) + 2m_0\lambda_2} = \sqrt{m_0^2 + l_0^2 + \frac{2m_0 l_0}{\sqrt{(1 - (v/c)^2}}}. \qquad (3.50)$$

Aquí se han utilizado las relaciones

$$|\mathbf{l}| = il_0 = \sqrt{\lambda_1^2 - \lambda_2^2} = i\sqrt{\lambda_2^2 - \lambda_1^2},$$
$$l_0 = \sqrt{\lambda_2^2 - \lambda_1^2}.$$

Si $v \ll c$ obtenemos la aproximación clásica de la fórmula (3.50)

$$M_0 \approx \sqrt{m_0^2 + l_0^2 + 2m_0 l_0} = m_0 + l_0,$$

que crea la ilusión de que en los choques totalmente inelásticos de cuerpos se conserva la masa en reposo. No obstante, en sentido exacto la masa en reposo no permanece constante en este caso, sino que se cumple la ley de conservación del *vector* masa en el sistema aislado de líneas de universo. La fórmula exacta (3.50) obtenida basándose en esta ley nos dice que, en los choques totalmente inelásticos de puntos materiales, la masa en reposo del punto unificado es mayor que la suma de las masas en reposo de los puntos iniciales:

$$M_0 > m_0 + l_0.$$

Para que se vea más claro el sentido físico de este aumento de la masa vamos a pasar al sistema de coordenadas $OX'Y'$, en el cual el eje OY' es colineal del vector $\mathbf{m} + \mathbf{l}$. En el sistema inercial de coordenadas con apóstrofos OX', los puntos materiales después del choque están en reposo, y antes de la colisión se movían con las velocidades

$$v_m = (ic) \cdot \operatorname{tg}(-i\alpha) = c \cdot \operatorname{th}\alpha,$$

$$v_l = (ic) \cdot \operatorname{tg}(i\beta) = -c \cdot \operatorname{th}\beta,$$

y su energía cinética total tenía la magnitud (véase (3.42))

$$E_m + E_l = m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1-(v_m/c)^2}} - 1 \right) +$$

$$+ l_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1-(v_l/c)^2}} - 1 \right) =$$

$$= m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1-\operatorname{th}^2\alpha}} - 1 \right) +$$

$$+ l_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1-\operatorname{th}^2\beta}} - 1 \right) =$$

$$= m_0 c^2 (\operatorname{ch}\alpha - 1) + l_0 c^2 (\operatorname{ch}\beta - 1) =$$

$$= c^2 [(m_0 \operatorname{ch}\alpha + l_0 \operatorname{ch}\beta) - (m_0 + l_0)].$$

Esta cantidad de energía cinética desapareció como resultado del choque de los puntos materiales, puesto que quedaron inmóviles, pero la magnitud

$$(m_0 \operatorname{ch}\alpha + l_0 \operatorname{ch}\beta) - (m_0 + l_0) = \frac{E_m + E_l}{c^2} \qquad (3.51)$$

es exactamente igual al exceso de la masa en reposo M_0 del punto material unificado sobre la suma $m_0 + l_0$. En efecto, proyectando los vectores masa $\mathbf{m}$ y $\mathbf{l}$ sobre la dirección del vector $\mathbf{m} + \mathbf{l}$ (véase la fig. 23), obtenemos

$$|\mathbf{m} + \mathbf{l}| = iM_0 = |\mathbf{m}| \cdot \cos(i\alpha) +$$

$$+ |\mathbf{l}| \cdot \cos(i\beta) = im_0 \cdot \operatorname{ch}\alpha + il_0 \cdot \operatorname{ch}\beta,$$

o bien

$$M_0 = m_0 \cdot \operatorname{ch} \alpha + l_0 \cdot \operatorname{ch} \beta.$$

Por lo que la igualdad (3.51) es equivalente a la igualdad

$$E_m + E_l = c^2 [M_0 - (m_0 + l_0)]$$

y expresa la ley de conservación de la energía en su forma más general: la energía cinética que tenían los puntos materiales antes del choque se invierte en aumentar la masa en reposo del punto material que se forma como resultado del choque totalmente inelástico.

Las leyes de conservación de la energía y el impulso de un sistema aislado de puntos materiales son corolarios de la ley de conservación del vector masa sumario del sistema aislado de líneas de universo. Si dos líneas de universo que formen un sistema así interaccionan entre sí, los vectores masa m y l que las caracterizaban antes de la interacción pueden sufrir cambios y transformarse después de la misma en los vectores m* y l*. Pero su suma permanece invariable

$$\mathbf{m} + \mathbf{l} = \mathbf{m}^* + \mathbf{l}^*. \qquad (3.52)$$

Descomponiendo según la base los vectores que figuran en esta igualdad

$$(\mu_1 \mathbf{e}_1 + \mu_2 \mathbf{e}_2) + (\lambda_1 \mathbf{e}_1 + \lambda_2 \mathbf{e}_2) =$$
$$= (\mu_1^* \mathbf{e}_1 + \mu_2^* \mathbf{e}_2) + (\lambda_1^* \mathbf{e}_1 + \lambda_2^* \mathbf{e}_2),$$
$$(\mu_1 + \lambda_1) \mathbf{e}_1 + (\mu_2 + \lambda_2) \mathbf{e}_2 =$$
$$= (\mu_1^* + \lambda_1^*) \mathbf{e}_1 + (\mu_2^* + \lambda_2^*) \mathbf{e}_2,$$

obtenemos la ley de conservación del impulso

$$\mu_1 + \lambda_1 = \mu_1^* + \lambda_1^* \qquad (3.53)$$

y la ley de conservación de la energía

$$\mu_2 + \lambda_2 = \mu_2^* + \lambda_2^*. \qquad (3.54)$$

Podríamos examinar el caso del choque de dos rectas de universo que se caracteriza porque, al producirse la colisión, se conserva totalmente la individualidad de las líneas de universo caracterizada por el módulo del vector masa. Ninguna de las rectas de universo que interaccionan experimenta aumento del módulo de su vector masa a expensas de la otra y, después del choque, el módulo de cada vector sigue siendo el mismo que tenía antes de la colisión:

$$|\mathbf{m}^*| = |\mathbf{m}|, \; |\mathbf{l}^*| = |\mathbf{l}|. \qquad (3.55)$$

La combinación de las condiciones (3.55) con la ley general (3.52) permite obtener, por medio de razonamientos geométricos, todas las fórmulas que caracterizan el choque totalmente elástico de puntos materiales. No vamos a detenernos en estos cálculos.

Tiene especial interés la aplicación de la idea del vector masa al fenómeno de la acción electromagnética, cuyos enigmas impulsaron la creación de la teoría de la relatividad y de la teoría cuántica. El influjo electromagnético va ligado a la variación

de la energía y el impulso de los objetos materiales. Por eso la línea isótropa, que sirve de conductora a la acción electromagnética, debe caracterizarse también por un vector masa. Pero un vector cuya dirección coincide con la de una isótropa, también es isótropo. La isotropía del vector masa debe consistir en que este vector, sin ser nulo, tenga el módulo igual a cero. Para esto es necesario y suficiente que las coordenadas del vector masa

$$\mathbf{m} = \mu_1 \mathbf{e}_1 + \mu_2 \mathbf{e}_2$$

satisfagan la condición

$$\mu_1^2 = \mu_2^2. \qquad (3.56)$$

Como muestra la relación (3.47) entre las coordenadas del vector masa

$$\mu_1 = -\frac{\mu_2 v}{c},$$

la condición (3.56) se cumple precisamente en aquellos casos en que $|v| = |c|$, es decir, para los objetos que se mueven con la velocidad de la luz respecto de un sistema inercial de coordenadas, que en el modelo de universo de Minkowski se identifican con las rectas que forman ángulos de inclinación infinitos con el eje OY:

$$|\operatorname{th}\varphi| = \left|-\frac{v}{c}\right| = \frac{c}{c} = 1, \quad \varphi = \pm\infty,$$

$$i\varphi = \pm i\infty,$$

Estas son las rectas isótropas.

Con una recta isótropa no puede estar ligado un sistema de coordenadas ortonormalizado del plano seudoeuclídeo, ya que en él la única dirección perpendicular a la isótropa es la dirección de la misma isótropa, y la distancia entre dos puntos cualesquiera de la isótropa es nula. Por consiguiente, cualquiera que sea el sistema de coordenadas que se elija, la componente del vector masa isótropo a lo largo del eje OY, es decir, el vector $\mu_2 \mathbf{e}_2$, no puede coincidir con el mismo vector isótropo $\mathbf{m}$, de manera que siempre existe una diferencia distinta de cero entre los módulos de estos vectores (véase (3.40)) que determina la energía cinética de la señal luminosa (véase (3.42)):

$$|\mu_2 \mathbf{e}_2| - |\mathbf{m}| = i\mu_2 - im_0 =$$

$$= i(\mu_2 - m_0) = i\frac{E_K}{c^2}.$$

Pero el módulo del vector masa isótropo es nulo:

$$|\mathbf{m}| = im_0 = i \cdot 0, \; m_0 = 0.$$

Por lo tanto, *toda* la proyección del vector masa isótropo sobre el eje OY se manifiesta en forma de energía *cinética*

$$\mu_2 - m_0 = \mu_2 - 0 = \mu_2 = E_K/c^2. \qquad (3.57)$$

Así como una recta isótropa no puede ser eje de un sistema de coordenadas ortonormalizado en el plano seudoeuclídeo, tampoco existe un sistema inercial en el espacio

perceptible sensorialmente respecto del cual esté en reposo la señal luminosa. Por eso el módulo del vector masa isótropo no puede ser interpretado como masa en reposo de la señal luminosa. La ausencia de masa en reposo suele expresarse, no muy acertadamente, con las palabras: la masa en reposo del fotón es nula.

La acción electromagnética se transmite en porciones separadas, los llamados cuantos, cuya energía cinética se determina por la relación de Planck

$$E_K = \varepsilon = h\nu, \qquad (3.58)$$

en la que $h = 6{,}626 \cdot 10^{-34}$ J·s es la constante de Planck, y ν, la frecuencia de la emisión. Sustituyendo (3.58) en (3.57) obtenemos la ordenada del vector masa isótropo de un cuanto electromagnético (fotón):

$$\mu_2 = \frac{\varepsilon}{c^2} = \frac{h\nu}{c^2} . \qquad (3.59)$$

De la relación general (3.47) entre las coordenadas del vector masa

$$\mu_1 = -\frac{p}{c} ,$$

teniendo en cuenta la condición de isotropía (3.56), hallamos el impulso del fotón

$$p = c \cdot |\mu_1| = c\mu_2 = c\frac{h\nu}{c^2} = \frac{h\nu}{c} . \qquad (3.60)$$

Las fórmulas (3.58), (3.59) y (3.60) son las principales relaciones de la teoría que describe la emisión, absorción y dispersión de la radiación electromagnética.

Al vector masa isótropo pueden aplicarse los mismos razonamientos que se expusieron en el § 11 acerca de los vectores geométricos isótropos. Allí, después de las fórmulas (2.25), se habló de la no coincidencia de las medidas lineal y métrica de la longitud en los vectores isótropos: en el sentido de las relaciones lineales, los vectores isótropos paralelos pueden tener distintas longitudes, y en el sentido métrico, la longitud de todos los vectores isótropos es la misma e igual a cero. Exactamente lo mismo, todos los vectores masa isótropos, en el sentido de las relaciones métricas, tienen el mismo módulo, igual a cero, aunque los vectores masa isótropos puedan diferir en el sentido lineal. Así, si los vectores masa de los fotones

$$\mathbf{m} = \mu_2 (\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2) = \mu_2 \mathbf{q}_0^+ \text{ y}$$
$$\mathbf{l} = \lambda_2 (\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2) = \lambda_2 \mathbf{q}_0^+$$

(véase (2.25)) están ligados por la dependencia lineal

$$\mathbf{l} = \eta \mathbf{m}, \qquad (3.61)$$

tiene lugar la misma dependencia entre sus coordenadas

$$\lambda_2 = \eta \mu_2, \qquad (3.62)$$

lo que significa que los fotones considerados, siendo iguales los módulos de sus vectores masa, son portadores de distinta

cantidad de energía y tienen diferentes impulsos. Para los actos de emisión, absorción y dispersión de fotones es muy importante determinar los vectores masa isótropos precisamente en el sentido *lineal*, puesto que el

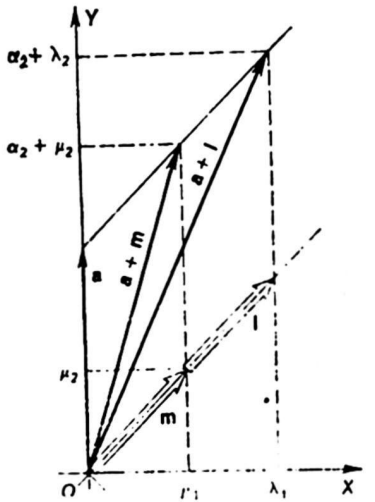


Fig. 24

vector masa resultante es la *suma* de los vectores que interaccionan. Esto se ilustra con la fig. 24. En ella el vector a representa el vector masa de un átomo, capaz de absorber tanto un fotón con vector masa m como un fotón con vector masa l. La parte negativa del eje *OY* representa la línea de universo del átomo antes de que éste perciba la acción electromagnética por la

isótropa $y = x$ en el punto de universo O. La absorción del fotón puede considerarse como el choque totalmente inelástico de la línea de universo del átomo con la isótropa, después del cual el fotón deja de existir como objeto físico independiente y su isótropa sólo permanece como línea geométrica exenta de propiedad dinámica (de vector masa). Consideremos primero la absorción por el átomo del fotón con vector masa m. Antes del choque el sistema aislado átomo—fotón se caracterizaba por el vector masa total a + m. Después de la colisión el vector masa sigue siendo el mismo, pero caracteriza ya no un sistema de líneas, sino una sola recta de universo que representa el átomo en estado excitado.

Escribamos la ley de conservación del vector masa del sistema aislado:

$$\mathbf{a} + \mathbf{m} = (0 \cdot \mathbf{e}_1 + \alpha_2 \mathbf{e}_2) + \mu_2 (\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2) =$$
$$= (0 + \mu_2)\, \mathbf{e}_1 + (\alpha_2 + \mu_2)\, \mathbf{e}_2.$$

Hasta que se produjo la absorción del fotón, el átomo estaba en reposo en el sistema de coordenadas considerado y su impulso era nulo ($p = \alpha_1 c = 0 \cdot c = 0$). Pero el vector masa $\mathbf{a}' = \mathbf{a} + \mathbf{m}$ del átomo excitado tiene distinta de cero la primera coordenada $\alpha_1' = 0 + \mu_2 = \mu_2$. Por lo tanto, el átomo excitado tiene el impulso

$$p = \alpha_1' c = \mu_2 c,$$

que le fue cedido por el fotón. La proyección del vector a+m sobre el eje *OY* es ma-

yor que la coordenada α_2 del vector **a** en la magnitud μ_2. Por consiguiente, la energía cinética $\mu_2 c^2$ del átomo excitado éste la ha recibido del fotón. Hallemos la diferencia entre los módulos de los vectores masa **a** + **m** y **a**:

$$|\mathbf{a}+\mathbf{m}|-|\mathbf{a}| = \sqrt{\mu_2^2-(\alpha_2+\mu_2)^2}-$$
$$-\sqrt{0^2-\alpha_2^2} = \sqrt{\mu_2^2-\alpha_2^2-\mu_2^2-2\alpha_2\mu_2}-$$
$$-\sqrt{-\alpha_2^2} = i\sqrt{\alpha_2^2+2\alpha_2\mu_2}-i\alpha_2 =$$
$$= i\left(\sqrt{\alpha_2^2+2\alpha_2\mu_2}-\alpha_2\right).$$

Esto significa que la masa en reposo del átomo excitado es mayor que la masa en reposo del átomo sin excitar en la magnitud

$$\Delta\alpha_2 = \sqrt{\alpha_2^2+2\alpha_2\mu_2}-\alpha_2 =$$
$$= \alpha_2\sqrt{1+2\frac{\mu_2}{\alpha_2}}-\alpha_2 -$$
$$= \alpha_2\left(\sqrt{1+2\frac{\mu_2}{\alpha_2}}-1\right).$$

Como la razón μ_2/α_2 es muy pequeña comparada con la unidad, puede utilizarse la igualdad aproximada

$$\sqrt{1+2\frac{\mu_2}{\alpha_2}} \approx 1+\frac{1}{2}\left(2\frac{\mu_2}{\alpha_2}\right) = 1+\frac{\mu_2}{\alpha_2},$$

y entonces se obtiene que

$$\Delta\alpha_2 \approx \alpha_2\left[\left(1+\frac{\mu_2}{\alpha_2}\right)-1\right] = \alpha_2\cdot\frac{\mu_2}{\alpha_2} = \mu_2.$$

De este modo, el incremento de la masa en reposo del átomo excitado es apoximadamente igual a la proyección del vector masa isótropo **m** sobre el eje de ordenadas (que corresponde a la energía $\mu_2 c^2$ absorbida por el átomo). La magnitud $\Delta\alpha_2 \cdot c^2 \approx \mu_2 c^2$ es la energía de excitación del átomo.

En la fig. 24 se representa también el caso en que el átomo absorbe el fotón caracterizado por el vector masa isótropo **l**. Si este vector, en *sentido lineal*, es η veces mayor que el vector **m** (véanse (3.61) y (3.62)), el átomo adquiere η veces más impulso y η veces más energía cinética que cuando absorbe el fotón con vector masa **m**. En este caso el incremento de la masa en reposo del átomo (y de su energía de excitación) también será aproximadamente η veces mayor.

Las coordenadas de un radio vector isótropo se transforman, cuando cambia el sistema de coordenadas, de acuerdo con las fórmulas generales (2.80) y (2.81), y las coordenadas del vector masa isótropo, según las fórmulas análogas (3.32). Escribimos estas transformaciones para el vector masa isótropo $\mathbf{m} = \mu_2 \mathbf{q}_0^+ = \mu_2 (\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2)$:

$$\mu_1 = \mu_2,$$
$$\mu_1' = \mu_2 \cdot \operatorname{ch}\varphi + \mu_2 \cdot \operatorname{sh}\varphi =$$
$$= \mu_2\left(\frac{e^{\varphi}+e^{-\varphi}}{e}+\frac{e^{\varphi}-e^{-\varphi}}{2}\right) = \mu_2 e^{\varphi},$$
$$\mu_2' = \mu_2 \cdot \operatorname{sh}\varphi + \mu_2 \cdot \operatorname{ch}\varphi = \mu_2 e^{\varphi}, \quad (3.63)$$
$$\mu_1' = \mu_2'.$$

La interpretación geométrica y física de la transformación (3.63) se da en la fig. 25. En ella PF es la recta de universo de la fuente de fotones, por ejemplo, de una estrella. El vector isótropo $\mathbf{m} = \mu_2 (\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2)$

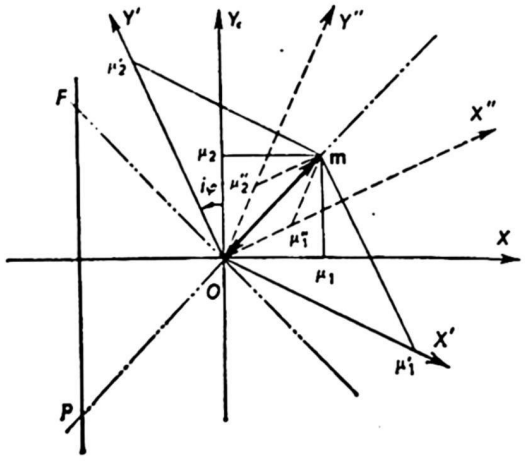


Fig. 25

se representa aplicado al punto O, ya que nos interesa su acción precisamente en este punto de universo. Se muestran tres posibilidades características para que el vector masa isótropo $\mathbf{m}$ sea percibido por el observador que se encuentra en el punto de universo O. Si la recta de universo del observador tiene la dirección OY, paralela a la recta de universo PF de la estrella, las coordenadas del vector $\mathbf{m}$ sobre los ejes OY y OX serán respectivamente iguales

a μ_2 y μ_1 ($\mu_2 = \mu_1$). En este caso la estrella es perceptible en forma de punto material fijo en el sistema inercial de coordenadas OX del espacio unidimensional. Si la recta de universo del observador tiene la dirección OY', desviada en un ángulo $i\varphi$ en el sentido positivo de medida de los ángulos ($\varphi > 0$), el observador se mueve al encuentro de la estrella (o la estrella al encuentro del observador). En este caso las coordenadas del vector isótropo $\mathbf{m}$ sobre los ejes OY' y OX' son μ_1' y μ_2', siendo, según la fórmula (3.63),

$$\mu_2' = \mu_2 e^{\varphi} > \mu_2 \quad (\varphi > 0).$$

Finalmente, si la recta de universo del observador tiene la dirección OY'', desviada de OY en el ángulo $i\varphi$ en sentido negativo ($\varphi < 0$), el observador se aleja de la estrella (o la estrella del observador) y el vector $\mathbf{m}$ tiene sobre los ejes OY'' y OX'' las coordenadas $\mu_2'' = \mu_1''$, las cuales, de acuerdo con (3.63), son menores que las coordenadas μ_2 y μ_1:

$$\mu_2'' = \mu_2 e^{\varphi} < \mu_2 \quad (\varphi < 0).$$

Según las fórmulas (3.58) y (3.59), la energía $\mu_2 c^2$ del cuanto electromagnético se caracteriza unívocamente por la frecuencia ν, puesto que las constantes c y h no dependen del sistema de coordenadas que se elija. Por lo tanto, de (3.59) se sigue que

$$\mu_2' = \frac{h}{c^2} \nu'$$

y la transformación (3.63) puede representarse en la forma

$$\nu' = \nu e^{\varphi}. \qquad (3.64)$$

Expresemos la dependencia (3.64) mediante la velocidad v del movimiento relativo de los sistemas inerciales de coordenadas. Para eso aprovechamos las relaciones (2.52) y (3.7):

$$\operatorname{th}\varphi = \frac{e^{\varphi}-e^{-\varphi}}{e^{\varphi}+e^{-\varphi}}, \quad \operatorname{th}\varphi = -\frac{v}{c}.$$

Hacemos las transformaciones

$$e^{\varphi}\cdot\operatorname{th}\varphi + e^{-\varphi}\cdot\operatorname{th}\varphi = e^{\varphi} - e^{-\varphi} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^{-\varphi}(1+\operatorname{th}\varphi) = e^{\varphi}(1-\operatorname{th}\varphi),$$

$$\frac{1+\operatorname{th}\varphi}{1-\operatorname{th}\varphi} = e^{2\varphi},$$

$$e^{\varphi} = \sqrt{\frac{1+\operatorname{th}\varphi}{1-\operatorname{th}\varphi}} = \sqrt{\frac{1-(v/c)}{1+(v/c)}}.$$

Sustituyendo la última expresión en (3.64), obtenemos

$$\nu' = \nu e^{\varphi} = \nu\sqrt{\frac{1-(v/c)}{1+(v/c)}}. \qquad (3.65)$$

Ésta es la expresión exacta del efecto Doppler que se emplea mucho en las investigaciones astrofísicas. En virtud de que ciertos tipos de átomos son capaces de emitir series de fotones que se caracterizan por tener relaciones de energía (relaciones lineales) rigurosamente determinadas, los átomos se pueden conocer por sus espectros. Los espectros de los átomos se estudian en las condiciones de laboratorio, es decir, con la fuente en reposo, y luego, por la frecuencia observada ν' de una línea espectral conocida, se calcula el valor de la velocidad v de la fuente de fotones respecto del observador, valiéndose de la fórmula (3.65).

§ 20. Fuerza de Minkowski

Ahora ya estamos en condiciones de estudiar, desde las posiciones del modelo de universo de Minkowski, la ley fundamental de la dinámica conocida en la enunciación clásica como segunda ley de Newton. Supongamos que la ecuación del movimiento de un punto material, en un espacio unidimensional perceptible sensorialmente, respecto de un sistema inercial de coordenadas OX, tiene la forma $x = F(t)$. Entonces en el correspondiente sistema de coordenadas ortonormalizado OXY del plano seudoeuclídeo la forma de la línea de universo (que en el caso general es curva) se define por la función (3.21)

$$x = F(t) = F\left(\frac{y}{c}\right) = f(y).$$

Esta línea de universo se ha representado en la fig. 26. En ella se ha elegido arbitrariamente el punto M, cuyas coordenadas son $(x = f(y);\ y)$, y cierto punto M_1, próximo al primero, de coordenadas

$$x_1 = f(y_1) = f(y + \Delta y) = x + \Delta x,$$

$$y_1 = y + \Delta y.$$

El vector cuerda

$$\overline{MM_1} = (x_1 - x)\,\mathbf{e}_1 + (y_1 - y)\,\mathbf{e}_2 = \\ = \Delta x \cdot \mathbf{e}_1 + \Delta y \cdot \mathbf{e}_2 \qquad (3.66)$$

tiene la longitud

$$|\overline{MM_1}| = \sqrt{\Delta x^2 - \Delta y^2} = \sqrt{(-1)(\Delta y^2 - \Delta x^2)} = \\ = i\sqrt{\Delta y^2 - \Delta x^2}, \qquad (3.67)$$

expresada por un número imaginario. Si el punto M_1 se aproxima al M, tendiendo a

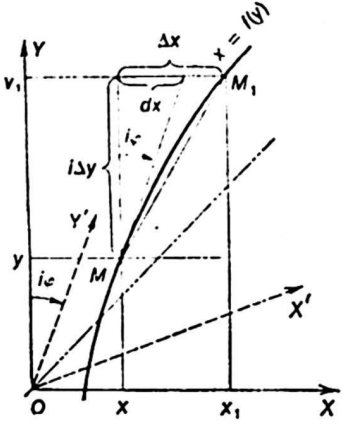


Fig. 26

cero el incremento Δy de la ordenada (y, por consiguiente, el incremento Δx de la abscisa), la cuerda MM_1 cambiará de dirección, tendiendo en el límite a tomar la dirección de la tangente a la línea de universo en el punto M. Cuando los puntos

M_1 y M están suficientemente próximos entre sí, se puede considerar que el vector $\overline{MM_1}$ es pequeño y coincide con un trozo pequeño de la línea de universo en las proximidades del punto M. En este caso la longitud del vector $\overline{MM_1}$ (véase (3.67)) será el elemento de longitud de la línea de universo

$$i \cdot ds = i\sqrt{dy^2 - dx^2} = \sqrt{dx^2 - dy^2}, \qquad (3.68)$$

La adición (integración) de pequeños elementos de longitud da la longitud *is* de un trozo *finito* de la línea de universo. La posición de un punto cualquiera M en la línea de universo dada puede determinarse por la distancia *is* de este punto a otro punto fijo M_0 sobre la misma línea, medida a lo largo de ésta. Por eso el radio vector $\mathbf{r} = \overline{OM}$ del punto M se puede caracterizar también por el valor del parámetro real s correspondiente a este punto, y la línea de universo misma se puede definir con una ecuación vectorial de la forma

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(s), \qquad (3.69)$$

considerando función del parametro s el radio vector del punto actual de la línea. Entonces para el vector cuerda $\overline{MM_1}$ se puede introducir la designación

$$\Delta\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r} = \overline{OM_1} - \overline{OM} = \overline{MM_1} = \\ = \Delta x \cdot \mathbf{e}_1 + \Delta y \cdot \mathbf{e}_2$$

y para un trozo tan pequeño como se quiera de la línea de universo, la designación

$$d\mathbf{r} = dx \cdot \mathbf{e}_1 + dy \cdot \mathbf{e}_2. \qquad (3.70)$$

Es evidente que la longitud del pequeño trozo $d\mathbf{r}$ de la línea de universo será (véase (3.68))

$$|d\mathbf{r}| = i \cdot ds, \qquad (3.71)$$

siendo

$$ds = \sqrt{dy^2 - dx^2}, \qquad (3.72)$$

El producto del vector $d\mathbf{r}$ por el número real $\frac{1}{ds}$ será un vector, tangente a la línea de universo en el punto M, y la longitud de este vector será igual a la unidad imaginaria

$$\frac{1}{ds} \cdot d\mathbf{r} = \mathbf{l}^0, \quad |\mathbf{l}^0| = \frac{1}{ds} \cdot |d\mathbf{r}| = \frac{i \cdot ds}{ds} = i. \qquad (3.73)$$

Por eso llamaremos al vector $\mathbf{l}^0$ *versor tangente* a la línea de universo. El versor tangente $\mathbf{l}^0$, puede considerarse como derivada de la función vectorial $\mathbf{r}(s)$ respecto del argumento real s, ya que es la razón del incremento $d\mathbf{r}$ del vector función $\mathbf{r}(s)$ al incremento ds del argumento cuando ds tiende a cero:

$$l^0 = \frac{d\mathbf{r}}{ds} = \frac{dx}{ds}\,\mathbf{e}_1 + \frac{dy}{ds}\,\mathbf{e}_2. \qquad (3.74)$$

A las coordenadas del versor tangente $\mathbf{l}^0$ podemos darles interpretación trigonométrica. De acuerdo con la fig. 26 y las fórmulas (2.47) y (2.55), tenemos que

$$\frac{dx}{|d\mathbf{r}|} = \frac{dx}{i \cdot ds} = \operatorname{sen}(i\varphi) = i \cdot \operatorname{sh}\varphi,$$

donde $i\varphi$ es el ángulo entre el eje OY y la tangente a la línea de universo en el punto M. Luego hallamos

$$i \cdot \operatorname{sh}\varphi = \frac{dx}{i \cdot ds} = -i \cdot \frac{dx}{ds},$$

$$\frac{dx}{ds} = -\operatorname{sh}\varphi. \qquad (3.75)$$

De un modo análogo, valiéndonos de la fig. 26 y la fórmula (2.54), obtenemos

$$\cos(i\varphi) = \frac{i \cdot dy}{|d\mathbf{r}|} = \frac{i \cdot dy}{i \cdot ds} = \frac{dy}{ds} = \operatorname{ch}\varphi. \qquad (3.76)$$

Esto permite escribir la descomposición (3.74) del versor tangente $\mathbf{l}^0$ en la forma

$$\mathbf{l}^0 = \frac{d\mathbf{r}}{ds} = -\operatorname{sh}\varphi \cdot \mathbf{e}_1 + \operatorname{ch}\varphi \cdot \mathbf{e}_2. \qquad (3.77)$$

El paso siguiente de nuestra investigación consiste en considerar el versor tangente $\mathbf{l}^0$ como función del punto sobre la línea de universo o, lo que es lo mismo, como función del parámetro real s:

$$\frac{d\mathbf{r}}{ds} = l^0(s). \qquad (3.78)$$

En efecto, cada punto M de la línea de universo puede indicarse por medio de la distancia is medida a lo largo de esta línea desde un punto inicial M_0 sobre ella, y en cada punto M el versor tangente $\mathbf{l}^0$ estará

determinado por el ángulo $i\varphi$ de su desviación respecto del eje de ordenadas OY. Por lo tanto, este ángulo $i\varphi$ es función de la distancia is o, lo que es lo mismo, el argumento real φ de las funciones hiperbólicas sh φ y ch φ (coordenadas del versor $\mathbf{l}^0$ (véase (3.77)) es función del parámetro real s:

$$\varphi = \varphi(s).$$

Advertimos, a propósito de esto, que la derivada

$$\frac{d\varphi}{ds} = \frac{i \cdot d\varphi}{i \cdot ds} = \frac{d(i\varphi)}{d(is)} = K \qquad (3.79)$$

es la *curvatura de la línea de universo* en el punto M, es decir, la velocidad con que varía la dirección de la tangente a medida que avanza a lo largo de la línea.

En la fig. 27 se han representado el versor $\mathbf{l}^0$ tangente a la línea de universo en el punto M, y el versor $\mathbf{l}_1^0$ tangente en el punto M_1. Ambos versores tienen la misma longitud

$$|\mathbf{l}^0| = |\mathbf{l}_1^0| = i,$$

pero direcciones distintas. Efectuando la traslación paralela del versor $\mathbf{l}^0$ del punto M al punto M_1, vemos que en el trozo MM_1 el versor $\mathbf{l}^0$ recibe el incremento

$$\begin{aligned}\Delta\mathbf{l}^0 = \mathbf{l}_1^0 - \mathbf{l}^0 &= (-\mathrm{sh}\,\varphi_1 \cdot \mathbf{e}_1 + \\ &+ \mathrm{ch}\varphi_1 \cdot \mathbf{e}_2) - (-\mathrm{sh}\,\varphi \cdot \mathbf{e}_1 + \mathrm{ch}\varphi \cdot \mathbf{e}_2) = \\ &= (-\mathrm{sh}\varphi_1 - (-\mathrm{sh}\varphi))\,\mathbf{e}_1 + \\ &+ (\mathrm{ch}\varphi_1 - \mathrm{ch}\varphi)\,\mathbf{e}_2 = \\ &= \Delta(-\mathrm{sh}\,\varphi) \cdot \mathbf{e}_1 + \Delta(\mathrm{ch}\,\varphi) \cdot \mathbf{e}_2.\end{aligned}$$

En ese mismo trozo MM_1 de la línea de universo, el parámetro s aumenta en la magnitud Δs. El producto

$$\frac{1}{\Delta s} \cdot \Delta\mathbf{l}^0 = \frac{\Delta\mathbf{l}^0}{\Delta s} = \frac{\Delta(-\mathrm{sh}\,\varphi)}{\Delta s} \cdot \mathbf{e}_1 + \frac{\Delta(\mathrm{ch}\,\varphi)}{\Delta s} \mathbf{e}_2 \qquad (3.80)$$

es el vector que caracteriza el incremento medio del versor tangente en el trozo MM_1,

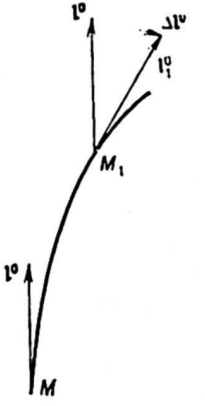


Fig. 27

debido al aumento del parámetro s en una unidad. Si el incremento Δs del parámetro tiende a cero, el trozo MM_1 se contraerá en un punto y el vector (3.80) caracterizará, en un entorno tan pequeño como se quiera del punto M, el incremento del versor tangente correspondiente a la variación unitaria del parámetro s. Al límite de esta

magnitud vectorial

$$\lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta \mathbf{l}^0}{\Delta s} = \frac{d\mathbf{l}^0}{ds} = \frac{d}{ds}(-\operatorname{sh}\varphi \cdot \mathbf{e}_1 + \operatorname{ch}\varphi \cdot \mathbf{e}_2) \tag{3.81}$$

le llamaremos *vector curvatura o torcedura* de la línea de universo en el punto M sin introducir para él una designación monolítera especial. Indicaremos solamente que es la segunda derivada, respecto del parámetro s, de la función vectorial (3.78), que describe la línea de universo:

$$\frac{d\mathbf{l}^0}{ds} = \frac{d}{ds}\left(\frac{d\mathbf{r}}{ds}\right) = \frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}.$$

Hallando la diferencial indicada en (3.81), encontramos las coordenadas del vector curvatura. Para eso introducimos la variable intermedia φ, ya que con ella es más fácil la diferenciación de las funciones hiperbólicas (funciones trigonométricas del ángulo en el plano seudoeuclídeo), y la derivada $d\varphi/ds$ es la magnitud ya conocida de la curvature de la línea de universo (véase (3.79)):

$$\frac{d\mathbf{l}^0}{ds} = \frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2} = \frac{d\mathbf{l}^0}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{ds} = \frac{d\mathbf{l}^0}{d\varphi} \cdot K =$$

$$= K\left(-\frac{d(\operatorname{sh}\varphi)}{d\varphi}\mathbf{e}_1 + \frac{d(\operatorname{ch}\varphi)}{d\varphi}\mathbf{e}_2\right) =$$

$$= K(-\operatorname{ch}\varphi \cdot \mathbf{e}_1 + \operatorname{sh}\varphi \cdot \mathbf{e}_2). \tag{3.82}$$

Introducimos la siguiente designación del vector

$$-\operatorname{ch}\varphi \cdot \mathbf{e}_1 + \operatorname{sh}\varphi \cdot \mathbf{e}_2 = \mathbf{n}^0 \tag{3.83}$$

y escribimos la igualdad (3.82) de un modo más abreviado:

$$\frac{d\mathbf{l}^0}{ds} = \frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2} = K\mathbf{n}^0. \tag{3.84}$$

Se ve con facilidad que el vector $\mathbf{n}^0$ es perpendicular al vector tangente $\mathbf{l}^0$ a la línea de universo en el punto M (véanse (3.77), (2.31) y (2.32)):

$$\langle \mathbf{l}^0, \mathbf{n}^0 \rangle = (-\operatorname{sh}\varphi)(-\operatorname{ch}\varphi) - \operatorname{ch}\varphi \times \times \operatorname{sh}\varphi = 0.$$

De aquí se puede concluir que el vector $\mathbf{n}^0$ pertenece a un sector real del plano seudoeuclídeo. Esto se confirma también calculando el módulo del vector (véase (2.58))

$$|\mathbf{n}^0| = (-\operatorname{ch}\varphi)^2 - (\operatorname{sh}\varphi)^2 =$$

$$= \operatorname{ch}^2\varphi - \operatorname{sh}^2\varphi = 1.$$

El vector $\mathbf{n}^0$ resulta ser unitario. Por esa razón le damos el nombre de *versor de la normal* a la línea de universo (3.69) en el punto M. De este modo, el vector curvatura (3.84) está dirigido según la normal $\mathbf{n}^0$ a la línea de universo, y su módulo es igual a la curvatura de dicha línea:

$$\left|\frac{d\mathbf{l}^0}{ds}\right| = \left|\frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}\right| = |K \cdot \mathbf{n}^0| = |K|. \tag{3.85}$$

Una vez obtenidas las relaciones geométricas fundamentales que caracterizan la dirección de la línea de universo y la variación de esta dirección (torcedura), pasamos al aspecto dinámico del problema. Como se dijo en el § 19, la docilidad de la

línea de universo a la acción torcedora se caracteriza por el vector masa m dirigido tangencialmente a la línea hacia el lado de su crecimiento. Eso permite representar el vector m en forma de producto del versor tangente l^0 por un número real, según el modelo general de las relaciones lineales (1.5) y (1.6). Como el número real debe indicar cuántas veces mayor es el módulo del vector m que el módulo del vector l^0 (véanse las págs. 124—127 y también (3.29) y (3.73)), obtenemos

$$\frac{|\mathbf{m}|}{|l^0|} = \frac{i \cdot m_0}{i} = m_0,$$

$$\mathbf{m} = m_0 l^0 = m_0 (-\operatorname{sh} \varphi \cdot \mathbf{e}_1 + \operatorname{ch} \varphi \cdot \mathbf{e}_2). \quad (3.86)$$

Al torcesre la línea de universo cambia la dirección del vector masa, y de característica de este cambio sirve, evidentemente, la derivada

$$\frac{d\mathbf{m}}{ds} = \frac{d}{ds}(m_0 l^0) = m_0 \frac{dl^0}{ds} = m_0 K \mathbf{n}^0. \quad (3.87)$$

La igualdad (3.87) expresa una relación física *invariante*, puesto que las magnitudes escalares y vectoriales que participan en ella (s, m_0, K, m, l^0, y $\mathbf{n}^0$) no dependen del sistema de coordenadas que se elija. Sin embargo, se transforma con mucha facilidad al lenguaje de las coordenadas, si el sistema de coordenadas se elige como se ha elegido en la fig. 26 el sistema $OX'Y'$, es decir, dirigiendo el eje de ordenadas paralelamente a la tangente a la línea de

universo en el punto M. Este sistema de coordenadas es precisamente el que ofrece mayor interés para comparar la relación (3.87) con la segunda ley de Newton, ya que la ley clásica del movimiento de un cuerpo concuerda tanto mejor con la experiencia cuanto menor es la velocidad de éste. Y como quiera que en el sistema de coordenadas $OX'Y'$ de la fig. 26 el punto de universo M se percibe en forma de punto material en un instante de inmovilidad, para este caso la segunda ley de Newton es irreprochablemente exacta. Sólo nos queda tener en cuenta que la longitud is del trozo de línea de universo se percibe, en el sistema de coordenadas ligado a esta línea, en forma de intervalo de tiempo propio τ, y la relación entre las magnitudes is y τ se expresa por una igualdad del tipo (3.24)

$$is = (ic)\,\tau, \text{ o bien } s = c\tau,$$

de manera que al tomar la diferencial tenemos

$$ds = c \cdot d\tau. \quad (3.88)$$

Sustituyendo (3.88) en (3.79), obtenemos para el vector l^0, tangente a la línea de universo, la expresión

$$l^0 = \frac{d\mathbf{r}}{ds} = \frac{1}{c} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{d\tau} = \frac{1}{c}\left(\frac{dx}{d\tau}\mathbf{e}_1 + \frac{dy}{d\tau}\mathbf{e}_2\right). \quad (3.89)$$

y para el vector curvatura (véanse (3.82) y (3.84)), la expresión

$$\frac{d\mathbf{l}^0}{ds}=\frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}=\frac{1}{c}\cdot\frac{d\mathbf{l}^0}{d\tau}=\frac{1}{c}\cdot\frac{d}{d\tau}\left(\frac{d\mathbf{r}}{ds}\right)=$$
$$=\frac{1}{c}\cdot\frac{d}{d\tau}\left(\frac{1}{c}\cdot\frac{d\mathbf{r}}{d\tau}\right)=\frac{1}{c^2}\cdot\frac{d^2\mathbf{r}}{d\tau^2}=$$
$$=\frac{1}{c^2}\cdot\frac{d}{d\tau}\left(\frac{dx}{d\tau}\mathbf{e}_1+\frac{dy}{d\tau}\mathbf{e}_2\right)=$$
$$=\frac{1}{c^2}\left(\frac{d^2x}{d\tau^2}\mathbf{e}_1+\frac{d^2y}{d\tau^2}\mathbf{e}_2\right). \qquad (3.90)$$

El versor tangente $\mathbf{l}^0$ en el punto M es paralelo al eje de ordenadas OY' en la fig. 26, y el vector curvatura $\frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}$ es *perpendicular* al $\mathbf{l}^0$ y al eje OY' (véanse (3.83) y (3.84). Por lo tanto, en el sistema de coordenadas $OX'Y'$ (cuya base ortonormalizada es $\mathbf{e}_1'$, $\mathbf{e}_2'$) la expresión (3.90) toma la forma

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}=\frac{1}{c^2}\cdot\frac{d^2\mathbf{r}}{d\tau^2}=\frac{1}{c^2}\cdot\frac{d^2x'}{d\tau^2}\mathbf{e}_1'. \qquad (3.91)$$

(el vector curvatura es colineal del vector básico $\mathbf{e}_1'$, por ser perpendicular al eje OY'). Sustituyendo (3.91) en (3.84) y (3.87), obtenemos

$$\frac{d\mathbf{m}}{ds}=m_0(K\mathbf{n}^0)=m_0\frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}=\frac{m_0}{c^2}\cdot\frac{d^2x'}{d\tau^2}\mathbf{e}_1',$$

o bien

$$c^2\frac{d\mathbf{m}}{ds}=m_0\frac{d^2x'}{d\tau^2}\mathbf{e}_1'. \qquad (3.92)$$

Pasando a los módulos de los vectores, escribimos la igualdad (3.92) en forma escalar:

$$c^2\left|\frac{d\mathbf{m}}{ds}\right|=m_0\left|\frac{d^2x'}{d\tau^2}\right|. \qquad (3.93)$$

La magnitud $\frac{d^2x'}{d\tau^2}$ es, ni más ni menos, que la aceleración del punto material que se observa en el sistema de coordenadas con apóstrofos, y como, en el instante que se considera, la velocidad del punto material es nula, su inercia viene caracterizada por la masa en reposo m_0. De este modo, la igualdad (3.93), que se infiere de la relación (3.87), es la *segunda ley de Newton*. En este caso la magnitud $c^2\left|\frac{dm}{ds}\right|$ tiene dimensión y sentido físico de *fuerza*.

La segunda ley de Newton en la forma (3.93) sólo es satisfactoriamente exacta cuando la velocidad v del punto material es suficientemente pequeña $\left(\left|\frac{v}{c}\right|=|\operatorname{th}\varphi|\ll 1\right)$, y la relación (3.87), por lo visto, es la generalización de la segunda ley y expresa su carácter invariante (independiente del sistema de coordenadas que se elija). A la relación (3.87) se le puede dar una forma tal que adquiera más parecido con la segunda ley de Newton. Para eso introducimos en (3.87) y (3.84) la relación

(3.90):

$$\frac{dm}{ds} = m_0 (K\mathbf{n}^0) = m_0 \frac{d\mathbf{l}^0}{ds} = \frac{m_0}{c^2} \cdot \frac{d^2\mathbf{r}}{d\tau^2},$$

$$c^2 \frac{dm}{ds} = m_0 \frac{d^2\mathbf{r}}{d\tau^2}. \qquad (3.94)$$

El vector $\frac{d^2\mathbf{r}}{d\tau^2}$, que, de acuerdo con (3.90), es colineal del vector curvatura (3.81) de la línea de universo y su módulo es mayor que el de éste c^2 veces, se llama *4-vector aceleración*. Para él introducimos la designación

$$\vec{a} = \frac{d^2\mathbf{r}}{d\tau^2} = c^2 \frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2} = c^2 \frac{d\mathbf{l}^0}{ds} = c^2 K\mathbf{n}^0. \qquad (3.95)$$

El 4-vector aceleración $\vec{a}$ es la generalización del concepto de aceleración para el espacio de Minkowski y tiene el módulo

$$|\vec{a}| = c^2 |K\mathbf{n}^0| = c^2 |K|. \qquad (3.96)$$

Para el vector $c^2 \frac{dm}{ds}$ introducimos la designación

$$\vec{f} = c^2 \frac{dm}{ds} = m_0 c^2 K\mathbf{n}^0. \qquad (3.97)$$

Este vector se llama *fuerza de Minkowski*. Teniendo en cuenta las designaciones (3.97) y (3.95), escribimos la relación (3.94), equivalente a la (3.87), en la forma

$$\vec{f} = m_0 \vec{a}, \qquad (3.98)$$

parecida a como se escribe la segunda ley de Newton (la fuerza es igual al producto de la masa por la aceleración). El módulo de la fuerza de Minkowski (véase (3.97)), es

$$|\vec{f}| = m_0 c^2 |K\mathbf{n}^0| = m_0 c^2 |K|. \qquad (3.99)$$

Por analogía con los fenómenos, explicados en el § 19 por la proyección del vector masa sobre el eje del sistema de coordenadas del observador en el plano seudoeuclídeo, se nos ocurre pensar que la acción que se observa de la fuerza sobre el punto material debe coincidir con la proyección de la fuerza de Minkowski $\vec{f}$ sobre el eje OX, y la aceleración que se observa del punto material, con la proyección del 4-vector aceleración $\vec{a}$ sobre ese mismo eje. Sin embargo, el estudio detallado pone al descubierto en cada uno de estos casos una relación más compleja entre el vector invariante y su manifestación observable.

De acuerdo con (3.95), (3.83) y (3.90), tenemos que

$$\vec{a} = \frac{d^2\mathbf{r}}{d\tau^2} = c^2 K\mathbf{n}^0 = c^2 K (-\operatorname{ch}\varphi \cdot \mathbf{e}_1 + \operatorname{sh}\varphi \cdot \mathbf{e}_2) =$$

$$= \frac{d^2x}{d\tau^2} \mathbf{e}_1 + \frac{d^2y}{d\tau^2} \mathbf{e}_2 = a_x \mathbf{e}_1 + a_y \mathbf{e}_2.$$

Por consiguiente, la proyección del vector $\vec{a}$ sobre el eje OX será

$$a_x = \frac{d^2x}{d\tau^2} = -c^2 K \cdot \operatorname{ch}\varphi, \qquad (3.100)$$

cuya forma se parece a la de nuestra idea ordinaria de la aceleración como segunda derivada de la coordenada espacial respecto del tiempo. La diferencia esencial consiste en que en (3.100) la doble diferencial se toma respecto del *tiempo propio* τ del punto material (línea de universo) y no respecto del tiempo t del sistema de coordenadas del observador, como ocurre en el caso de la aceleración habitual

$$w=\frac{dv}{dt}=\frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right)=\frac{d^2x}{dt^2}. \quad (3.101)$$

La aceleración w que se observa se puede expresar mediante el módulo del vector $\vec{a}$ (véase (3.96)) y de la proyección a_x, valiéndose de las relaciones (3.24), (3.88), (3.76) y (3.75):

$$dy=c\cdot dt,\ ds=c\cdot d\tau,$$

$$\frac{dt}{d\tau}=\frac{dy/c}{ds/c}=\frac{dy}{ds}=\operatorname{ch}\varphi, \quad (3.102)$$

$$\frac{dx}{d\tau}=\frac{dx}{ds}\cdot\frac{ds}{d\tau}=c\cdot\frac{dx}{ds}=-c\cdot\operatorname{sh}\varphi. \quad (3.103)$$

Ahora vamos a realizar en (3.101) las sustituciones de la variable de diferenciación (en los lugares necesarios, sobre el signo de igualdad, indicamos los números de las fórmulas que sirven de intermediarias en la

igualdad):

$$w=\frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{d\tau}\cdot\frac{d\tau}{dt}\right)\overset{(3.103),\ (3.102)}{=\!=\!=}\frac{d}{dt}\times$$

$$\times\left(-c\cdot\operatorname{sh}\varphi\cdot\frac{1}{\operatorname{ch}\varphi}\right)=-c\frac{d(\operatorname{th}\varphi)}{dt}=$$

$$=-c\frac{d(\operatorname{th}\varphi)}{d\tau}\cdot\frac{d\tau}{dt}=-\frac{c}{\operatorname{ch}\varphi}\cdot\frac{d(\operatorname{th}\varphi)}{ds}\times$$

$$\times\frac{ds}{d\tau}\overset{(3.88)}{=\!=}-\frac{c^2}{\operatorname{ch}\varphi}\cdot\frac{d(\operatorname{th}\varphi)}{ds}=$$

$$=-\frac{c}{\operatorname{ch}\varphi}\cdot\frac{d(\operatorname{th}\varphi)}{d\varphi}\cdot\frac{d\varphi}{ds}\overset{(3.79)}{=\!=}-\frac{c^2K}{\operatorname{ch}\varphi}\cdot\frac{d(\operatorname{th}\varphi)}{d\varphi}=$$

$$=-\frac{c^2K}{\operatorname{ch}\varphi}\cdot\frac{1}{\operatorname{ch}^2\varphi}=-\frac{c^2K}{\operatorname{ch}^3\varphi}. \quad (3.104)$$

Tomando en consideración (3.96), escribimos (3.104) en la forma

$$w=\pm\frac{|\vec{a}|}{\operatorname{ch}^3\varphi}, \quad (3.105)$$

y teniendo en cuenta (3.100), resulta que

$$w=-\frac{c^2K}{\operatorname{ch}^3\varphi}\cdot\frac{\operatorname{ch}\varphi}{\operatorname{ch}\varphi}=\frac{a_x}{\operatorname{ch}^4\varphi}. \quad (3.106)$$

Para la mecánica clásica la aceleración de un punto material es una magnitud invariante, independiente del sistema inercial de coordenadas que se elija, o, en otras palabras, de la velocidad del punto material. Las relaciones (3.104)—(3.106) ponen de manifiesto la inexactitud de esta idea clásica. Si la velocidad v del punto material es pequeña comparada con la velocidad de

la luz $\left(\left|\frac{v}{c}\right| = |\operatorname{th}\varphi| \ll 1\right)$, $\operatorname{ch}\varphi \approx 1$ y se pueden utilizar las igualdades aproximadas

$$w \approx -c^2 K = \pm |\vec{a}| \approx a_x \qquad (3.107)$$

En el caso en que $v = 0$ ($\operatorname{ch}\varphi = 1$), la igualdad (3.107) es exacta, es decir, el módulo del 4-vector aceleración coincide con la aceleración del punto material observada en el sistema de coordenadas en el cual el punto no se mueve en el instante que se considera. Pero en otros sistemas de coordenadas la magnitud de la aceleración w observada es $\operatorname{ch}^3\varphi$ veces menor que la magnitud invariante $|\vec{a}| = c^2 |K|$ y $\operatorname{ch}^4\varphi$ veces menor que la proyección a_x del 4-vector aceleración sobre el eje OX.

A la luz de estos resultados adquiere gran interés el problema siguiente: ¿Cómo influe la dependencia de la aceleración observada del punto material respecto de la velocidad en la magnitud de la fuerza? ¿Depende del sistema de coordenadas que se elija, o, lo que es lo mismo, de la velocidad del punto material, la fuerza que actúa sobre dicho punto? El concepto de fuerza de Minkowski ayuda a contestar a estas preguntas.

Por la definición (3.97) de la fuerza de Minkowski se ve que ésta es proporcional a la derivada del vector masa respecto del

tiempo propio τ de la línea de universo:

$$\vec{f} = c^2 \frac{dm}{ds} = c^2 \frac{dm}{d\tau} \cdot \frac{d\tau}{ds} \overset{(3.88)}{=\!=} c^2 \frac{dm}{d\tau} \cdot \frac{1}{c} = c \frac{dm}{d\tau}. \qquad (3.108)$$

Pero en las mediciones prácticas el observador opera no con el tiempo propio τ de la línea de universo (punto material), sino con el tiempo t de su sistema de coordenadas, y, en el caso general, el elemento dt de tiempo del observador no coincide con el elemento $d\tau$ de tiempo propio (véase (3.102)). Por eso es de esperar que el valor observado de la fuerza sea determinado por la derivada del vector masa respecto del tiempo t del sistema de coordenadas del observador, es decir, por la magnitud

$$c \frac{dm}{d\tau} = c \frac{dm}{dt} \cdot \frac{d\tau}{dt} \overset{(3.102)}{=\!=} c \frac{dm}{d\tau} \times \frac{1}{\operatorname{ch}\varphi} \overset{(3.108)}{=\!=} \frac{1}{\operatorname{ch}\varphi} \cdot \vec{f}. \qquad (3.109)$$

No es difícil confirmar que esta suposición es justa. Basta representar el vector masa $\mathbf{m}$ en forma de la descomposición (3.27) según la base del plano seudoeuclídeo y tener en cuenta las relaciones (3.35) y (3.47):

$$c \frac{dm}{dt} = c \cdot \frac{d}{dt}(\mu_1 \mathbf{e}_1 + \mu_2 \mathbf{e}_2) = c\left(\frac{d\mu_1}{dt}\mathbf{e}_1 + \frac{d\mu_2}{dt}\mathbf{e}_2\right) = c\left(\frac{d}{dt}\left(\frac{p}{c}\right)\mathbf{e}_1 + \frac{d\mu_2}{dt}\mathbf{e}_2\right) = \frac{dp}{dt}\mathbf{e}_1 + c\frac{d\mu_2}{dt}\mathbf{e}_2. \qquad (3.110)$$

Diremos, para aclarar, que en la situación representada en la fig. 26, a la cual nos venimos refiriendo en este párrafo, el sistema de coordenadas con apóstrofos $OX'Y'$ desempeña el mismo papel que el sistema sin apóstrofos OXY en la fig. 22, ya que el vector m es paralelo al eje OY' en la fig. 26. Por eso $\mu_2' = m_0$, y con arreglo a (3.110) la fórmula (3.47) debe sustituirse por la relación $\mu_1 = -\mu_2' \cdot \mathrm{sh}\varphi = \frac{p}{c}$ (que se infiere del sistema de ecuaciones (3.32)). En la expresión (3.110) obtenida, el coeficiente del versor básico e_1 resulta ser igual a la derivada del impulso respecto del tiempo del observador, es decir, precisamente a la magnitud que tanto en la mecánica clásica como en la relativista se toma para definir la fuerza:

$$F = \frac{dp}{dt} = \frac{d(mv)}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{m_0 v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right). \qquad (3.111)$$

¿Quiere esto decir que la fuerza, tal como la entendemos de ordinario, es la primera coordenada del vector (3.110)? Esta opinión es aceptable sólo con una reserva. Todo depende de hasta qué punto es justa la idea de que la magnitud $c\frac{dm}{dt}$ es un vector determinado del plano seudoeuclídeo. A juzgar por lo escrito en (3.110), se trata de un vector descompuesto según

la base e_1, e_2. Es más, la igualdad (3.109) nos dice que la dirección del vector (3.110) coincide con la dirección de la fuerza de Minkowski $\vec{f}$. Pero el coeficiente de proporcionalidad

$$\frac{1}{\mathrm{ch}\varphi} = \sqrt{1-\mathrm{th}^2\varphi} = \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \qquad (3.112)$$

entre los vectores $\vec{f}$ y $c\frac{dm}{dt}$ no es una magnitud invariante, sino que depende del ángulo $i\varphi$ que forma la línea de universo (vector masa m) con el eje OY del sistema de coordenadas. Por lo tanto, el módulo de la magnitud $c\frac{dm}{dt}$ varía al cambiar el sistema de coordenadas, en lo cual se diferencia del módulo, verdaderamente invariante, del vector $\vec{f}$ (véase (3.99)):

$$\left|c\frac{dm}{dt}\right| = \left|\frac{1}{\mathrm{ch}\varphi}\vec{f}\right| = \frac{1}{\mathrm{ch}\varphi}\left|\vec{f}\right|. \qquad (3.113)$$

Así, pues, tras la expresión (3.110) se oculta en realidad no un vector determinado del plano seudoeuclídeo, sino un conjunto innumerable de vectores colineares de la fuerza de Minkowski que *difieren entre sí por el módulo*. A cada sistema de coordenadas OXY le corresponde su vector $c\frac{dm}{dt}$ del cual puede decirse que su poyección sobre el eje OX es la fuerza (3.111) que se observa en este sistema. Si se cambia el sis-

tema de coordenadas, varía el vector $c\frac{dm}{dt}$ (su módulo). He aquí por qué la magnitud (3.110) no se puede considerar invariante, es decir, como un vector determinado en el plano seudoeuclídeo, lo que la diferencia del vector $\vec{f}$.

Sin embargo, en la magnitud $c\frac{dm}{dt}$ se manifiesta, a pesar de todo, de un modo peculiar una característica invariante de la acción de la fuerza sobre la línea de universo. Escribamos la igualdad (3.109) en forma de descomposición de sus términos segundo y primero según la base del plano seudoeuclídeo (véanse (3.110), (3.97) y (3.83)):

$$\frac{dp}{dt}\mathbf{e}_1 + c\frac{d\mu_2}{dt}\mathbf{e}_2 = -\frac{1}{\operatorname{ch}\varphi}\, m_0c^2K\mathbf{n}^0$$

$$= -\frac{m_0c^2K}{\operatorname{ch}\varphi}(-\operatorname{ch}\varphi\cdot\mathbf{e}_1 + \operatorname{sh}\varphi\cdot\mathbf{e}_2)$$

$$= m_0c^2K(-\mathbf{e}_1 + \operatorname{th}\varphi\cdot\mathbf{e}_2). \qquad (3.114)$$

Igualando aquí los coeficientes de $\mathbf{e}_1$, obtenemos (teniendo en cuenta (3.111) y (3.99))

$$\frac{dp}{dt} = F = -m_0c^2K = -|\vec{f}| \qquad (3.115)$$

(el signo de la fuerza F es negativo cuando el valor de la curvatura K es positivo). La derivada del impulso respecto del tiempo del observador coincide numéricamente con el módulo de la fuerza de Minkowski, ¡que es invariante! Por consiguiente, el valor de la primera coordenada de la magnitud $c\frac{dm}{dt}$ permanece invariable cuando se pasa a otros sistemas de coordenadas en el plano seudoeuclídeo y, por lo tanto, el valor de la fuerza (3.111) que se observa debe ser el mismo en todos los sistemas de coordenadas inerciales unidimensionales. En este sentido se puede hablar de invariancia de la fuerza F observada, o de su independencia de la velocidad del punto material.

La segunda coordenada de la magnitud $c\frac{dm}{dt}$ también tiene interés como característica de la acción de la fuerza. Esta coordenada es proporcional a la potencia, es decir, al trabajo que realiza la fuerza F sobre el punto material en una unidad de tiempo del sistema de coordenadas del observador. En efecto, igualando en (3.114) los coeficientes del vector básico $\mathbf{e}_2$, hallamos (teniendo en cuenta (3.115) y (3.7)), que

$$c\frac{d\mu_2}{dt} = m_0c^2K\cdot\operatorname{th}\varphi = -F\cdot\operatorname{th}\varphi =$$

$$= -F\left(-\frac{v}{c}\right) = \frac{1}{c}(Fv) = \frac{1}{c}\cdot N, \qquad (3.116)$$

donde N es la potencia que desarrolla la fuerza F.

§21. Simultaneidad relativa y absoluta

En la física clásica el concepto de simultaneidad no permitía distintas interpretaciones: si el cómputo del tiempo no

depende del sistema espacial de coordenadas que se elija (véase (3.3)), los sucesos que ocurren en un mismo instante en un sistema de coordenadas cualquiera son simultáneos en cualquier otro sistema. De este modo, la simultaneidad intervenía como característica absoluta de los sucesos, independientemente de la elección del sistema de coordenadas.

En la teoría de la relatividad el concepto de simultaneidad deja de ser unívoco, y el modelo de universo de Minkowski da a esto una explicación sencilla. A los sistemas inerciales de coordenadas OX y $O'X'$, que se mueven uno respecto del otro en un espacio unidimensional perceptible sensorialmente, corresponden en un plano seudoeuclídeo del espacio universal los sistemas ortonormalizados de coordenadas OXY y $O'X'Y'$ con direcciones distintas de los ejes OY y $O'Y'$. Resulta cómodo considerar sistemas que tengan el origen común de coordenadas O. En cada sistema de coordenadas ortonormalizado en el plano seudoeuclídeo, la línea de simultaneidad (recta en que todos los puntos tienen el mismo valor de la ordenada $y = ct$) es perpendicular al eje de ordenadas. En la fig. 28 se han representado tres de estos sistemas: OXY, $OX'Y'$ y $OX''Y''$. Sobre los ejes de ordenadas de estos sistemas elegimos tres puntos A, B y C, cuyas ordenadas tienen el mismo valor $y = y_A$ en el sistema OXY, es decir, que son simultáneos en

el sistema de coordenadas sin apóstrofos. Estos mismos puntos tienen ya valores no iguales, sino distintos, de las ordenadas en

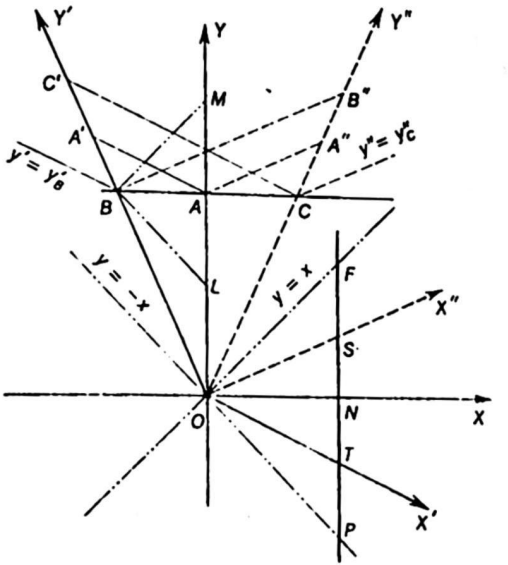


Fig. 28

el sistema de coordenadas con apóstrofos $OX'Y'$. Por los puntos A, B y C tracemos las líneas de simultaneidad del sistema $OX'Y'$: $y' = y'_B$, AA' y CC'. Sus intersecciones con el eje OY' indican los valores de la ordenada y' de los sucesos A, B y C en el sistema de coordenadas con apóstrofos y la secuencia de los sucesos con el tiempo desde el punto de vista de este sistema: $B \to A \to C$. En el sistema con apóstrofos

dobles $OX''Y''$, las líneas de simultaneidad $y'' = y\tilde{c}$, AA'' y BB'' muestran que los sucesos A, B y C se suceden entre sí en otro orden, a saber: $C \rightarrow A \rightarrow B$.

Para el observador ligado con la recta de universo OY', la cadena de sucesos $B \rightarrow A \rightarrow C$ significa el paso del pasado al futuro (aumento de la ordenada y'), mientras que para el observador ligado con la recta de universo OY'', la misma secuencia de los sucesos $B \rightarrow A \rightarrow C$ significa el paso del futuro al pasado (disminución de la ordenada y''). Este fenómeno no se puede pasar por alto, pero conviene advertir que no es tan paradógico como parece a primera vista. Y no existen razones para concluir que por el cambio del sistema de coordenadas se puede invertir la marcha del tiempo.

La teoría de la relatividad no niega la *diferencia absoluta* entre el pasado y el futuro, sino, al contrario, formula condiciones claras para hacer posible esta distinción, las cuales se interpretan con sencillez y evidencia en el modelo de universo de Minkowski. Para que dos puntos de universo A y B puedan ser simultáneos en un sistema ortonormalizado de coordenadas OXY de un plano seudoeuclídeo, estos puntos deben estar en una perpendicular al eje de ordenadas de dicho sistema. Y como el eje OY pertenece a los sectores imaginarios, la recta que une los puntos A y B debe pertenecer a los sectores reales. Todo eje OY se puede girar tanto hacia el lado positivo como hacia

el negativo, puesto que el ángulo entre cualquier vector no isótropo del sector superior y cada recta isótropa, limitadora de éste, es infinitamente grande. Por eso siempre se pueden encontrar unos sistemas de coordenadas $OX'Y'$ y $OX''Y''$ en los cuales los ejes OY' y OY'' se encuentren a distintos lados del eje OY. Si el vector $\overline{AB}$ tiene proyección negativa sobre el eje OY' (como en la fig. 28), el punto de universo B es anterior, en el sistema $OX'Y'$, al punto A. En este caso la proyección del vector $\overline{AB}$ sobre el eje OY'', desviado hacia el otro lado del eje OY, es positiva y el punto de universo B será posterior, en el sistema $OX''Y''$, al punto A. La dependencia del orden de secuencia de los sucesos respecto de la elección del eje de coordenadas sólo es posible para aquellos puntos de universo A y B entre los cuales se expresa la distancia por medio de un número real (el vector $\overline{AB}$ pertenece a un sector real).

En cambio, si los puntos de universo P y F son tales que la distancia entre ellos se expresa por medio de un número imaginario (el vector $\overline{PF}$ pertenece a un sector imaginario) o es igual a cero (los puntos se encuentran en una misma recta isótropa), el vector $\overline{PF}$ no puede ser perpendicular a ninguna recta del sector imaginario. Por consiguiente, no existe sistema alguno de coordenadas OXY en el cual los puntos de universo P y F puedan ser simultáneos.

Supongamos que en un sistema de coordenadas cualquiera el punto P es anterior al punto F (el vector $\overline{PF}$ pertenece al sector *superior* o a una de las rectas isótropas que lo limitan). Entonces la proyección del vector $\overline{PF}$ sobre una dirección *cualquiera* no isótropa del sector superior será positiva, y, por lo tanto, en cualquier sistema de coordenadas el suceso F será posterior al suceso P. En otras palabras, para los puntos de universo P y F que determinan un vector de un sector imaginario o un vector isótropo, la inversión del tiempo (vuelta atrás de la secuencia de los sucesos) es imposible cualquiera que sea el cambio de coordenadas que se haga, de manera que el suceso F es futuro *absoluto* respecto del suceso P.

En la fig. 28 todos los puntos del sector superior a partir del punto O, incluidas las rectas isótropas $y = x$ e $y = -x$ que lo limitan, se encuentran en la región del futuro absoluto respecto del punto O, y todos los puntos del sector inferior, junto con las isótropas que lo limitan, están en la región del pasado absoluto. De cada punto de un plano seudoeuclídeo parten dos sectores: un sector de pasado absoluto y otro sector de futuro absoluto. Todo vector tangente a cualquier línea de universo, en cualquiera de sus puntos y dirigido en el sentido en que aumenta dicha línea, pertenece al sector superior. Por eso, cualquiera que sea el punto que se elija en la línea de universo, la totalidad de la línea no sale de los

límites de los sectores imaginarios que tienen por vértice el punto elegido. Y esto significa que *en toda la línea de universo la diferencia entre el pasado y el futuro no puede depender del sistema de coordenadas que se elija y, en este sentido, es absoluta*. Para los puntos de cualquier recta isótropa, la diferencia entre el pasado y el futuro también es absoluta.

Si en el universo de Minkowski se realiza un proceso de revelación, existen dos tipos de relaciones de simultaneidad y no simultaneidad basados en dos criterios distintos. Según uno de los criterios, el orden de secuencia de los sucesos en el tiempo se determina por las proyecciones de los respectivos puntos de universo sobre el eje de ordenadas. Este criterio puede llamarse geométrico de coordenadas. Ése es el criterio que hemos seguido hasta ahora. De acuerdo con el segundo criterio, el orden de secuencia de los sucesos en el tiempo se determina por el orden de revelación de los respectivos puntos de universo. Ambos criterios conducen al mismo resultado cuando se trata de puntos de universo de una misma línea de universo. La deducción referente a la invariancia de la diferencia entre el pasado y el futuro en una misma línea de universo, obtenida basándose en el criterio geométrico de coordenadas, concuerda perfectamente con el concepto de proceso universal de revelación. Si las partes pasadas de la línea de universo son ya un objeto material for-

mado, revelado, y en el futuro ese objeto no existe, porque el proceso de revelación aún no ha llegado allí, esta diferencia física entre el pasado y el futuro tampoco depende del sistema de coordenadas que se elija.

El acuerdo entre los dos criterios puede infringirse cuando se trata de puntos que no se encuentran en una misma línea de universo. En la fig. 28 los puntos P y F se encuentran en las rectas isótropas $y = -x$ e $y = x$, que se cortan en el punto O. Por eso el punto P y todos los puntos, que se encuentran más abajo que él en la recta PF, son el pasado absoluto respecto del punto O. El punto F y todos los puntos, que se encuentran más arriba que él en la recta PF, son el futuro absoluto respecto del punto O. Pero cualquier punto *interior* del segmento PF está separado del punto O por una distancia expresada con un número real. Por eso para cada punto interior de dicho segmento puede hallarse un sistema de coordenadas en el cual este punto sea simultáneo del punto O, así como sistemas de coordenadas en los cuales este punto sea anterior o posterior al punto O. Por ejemplo, en el sistema de coordenadas OXY el punto de universo O es simultáneo del N en la recta PF. En el sistema de coordenadas $OX'Y'$ el punto O es simultáneo del T en la recta PF, y el punto N es futuro. En el sistema de coordenadas $OX''Y''$ el punto O es simultáneo del S en la recta PF, y el punto N es pasado. Ésta es la relatividad

de la simultaneidad que ya conocemos y que se basa en el criterio geométrico de coordenadas. El otro criterio, basado en la idea del proceso de revelación, no acepta esta multiformidad de las relaciones temporales. Según este criterio, con independencia del sistema de coordenadas que se elija, sólo es posible una de las tres relaciones siguientes: 1) el punto de universo N se revela a la vez que el punto O; 2) el punto N se manifiesta antes que el O; 3) el punto N aparece después que el O.

Cada observador nota, indudablemente, la realidad de los límites entre su pasado, puesto de manifiesto, y su futuro, aún no revelado. En cualquier instante de su vida nota el acto de la revelación y está justamente convencido de que en la misma situación se hallan todos los demás observadores y objetos inanimados. Pero, ¿qué punto de la línea de universo PF pasa el acto de la revelación a la vez que el punto O? Aquí sustituimos con las palabras «a la vez» la palabra «simultáneamente», puesto que ya es costumbre entender la simultaneidad en el sentido que le da el criterio de las coordenadas. Si hay estados del universo en los cuales existen (se manifiestan) los dos puntos de universo O y N, y hay también estados del universo en los cuales no existe ninguno de ellos, pero no hay tales estados en los cuales uno de dichos puntos exista, en tanto que el otro no, decimos que los puntos O y N pasan *a la vez* el acto de la

manifestación. Los puntos que se manifiestan a la vez merecen la denominación de *absolutamente simultáneos*.

El criterio geométrico de coordenadas no acepta la simultaneidad absoluta. Como quiera que en un espacio perceptible sensorialmente todos los sistemas de coordenadas inerciales son equivalentes y son equivalentes también los sistemas de coordenadas ortonormalizados correspondientes a ellos en el espacio universal seudoeuclídeo, la opinión acerca de la simultaneidad o no simultaneidad de los puntos de universo, desde la posición de un sistema de coordenadas, es tan justa como la opinión desde el punto de vista de cualquier otro sistema, aunque estas opiniones se contradigan. Como no existe un sistema de coordenadas privilegiado (absoluto), tampoco puede existir la simultaneidad absoluta.

Pero nosotros basamos el concepto de simultaneidad absoluta no en el criterio geométrico de coordenadas y, por lo tanto, no entramos en contradicción lógica con él. Es más, este concepto tampoco contradice las bases experimentales de la teoría de la relatividad, ya que la experimentación con los fenómenos mecánicos y electromagnéticos no permite descubrir la simultaneidad absoluta. Supongamos que el estado del observador ligado a la recta de universo OY' en la fig. 28 se representa por el punto de universo A. El observador sabe que se encuentra en el límite entre lo manifiesto y

lo no manifiesto y que atraviesa en su instante actual el acto de manifestación. Pero el punto B de la recta OY' no puede ser percibido por él en este instante y, por lo tanto, no puede saber si dicho punto se manifestará a la vez que el A, se manifestó ya antes o lo hará después. El punto de universo B podrá ser percibido por el observador cuando éste sea trasladado por la marcha del proceso de manifestación a lo largo de su recta, al punto M, que se encuentra en la misma recta isótropa que el punto B. Sin embargo, esto no le ayuda ya a resolver el problema que le interesa. El hecho de la posibilidad de observar el punto B desde el M sólo nos dice que el punto B se puso de manifiesto antes que el M, pero nada nos puede decir sobre la relación entre los instantes en que se manifiestan los puntos B y A.

Entre tanto, se pueden hacer experimentos físicos que permiten al observador ligado a la línea de universo OY medir las coordenadas del punto B en su sistema de coordenadas OXY. Supongamos que en el punto de universo O, en que se encuentran las rectas de universo OY y OY', el observador que se halla en la OY coloca un determinado dispositivo reflector en el punto material correspondiente de la línea de universo OY'. En instantes posteriores organiza dicho observador la emisión de fotones desde los puntos de universo de su recta OY de tal modo que cada fotón (serie

de fotones) c enga acerca del instante en que, por el reloj propio, se produjo la emisión. Al cabo de cierto tiempo el observador, que está en la línea OY, empezará a recibir sus señales reflejadas en la recta OY' y registrará los instantes de recepción. Disponiendo de estos datos experimentales, el observador razonará como sigue: si en el punto de universo M se recibe la señal reflejada que fue emitida t segundos antes, quiere decir que dicha señal fue enviada desde el punto de universo L, separado del punto M por el segmento $|\overline{LM}| = ict$. Con esto se puede hallar la ordenada del punto L:

$$|\overline{LM}| = i(y_M - y_L) = ict,$$

$$y_M - y_L = ct,\ y_L = y_M - ct.$$

En el tiempo t la señal luminosa recorre, a la ida y a la vuelta a lo largo del eje OX, la distancia

$$x_B = c \cdot \frac{t}{2},$$

que determina la abscisa del punto de universo B que reflejó la señal. La ordenada del punto B será

$$y_B = y_M - \frac{ct}{2}.$$

En la recta de universo OY esa misma ordenada la tiene el punto A:

$$y_A = y_M - \frac{y_M - y_L}{2} = y_M - \frac{ct}{2}.$$

De donde el observador saca la conclusión justa de que en su sistema de coordenadas el punto de universo B es simultáneo del punto A. Pero, como se dijo antes, esto no dice nada acerca de si el punto B se manifiesta antes, después o a la vez que el punto A.

Se puede plantear la pregunta: ¿vale la pena, entonces, hablar de simultaneidad absoluta, si experimentalmente no se puede descubrir? ¿No sería mejor desechar este concepto como innecesario y reconocer que en la naturaleza no existe más simultaneidad que la relativa? En realidad esta opinión no es tan intachable como parece a primera vista. Ya hemos aclarado la inconsistencia de la idea de la no existencia, en igual medida, del futuro y del pasado, existiendo sólo el presente. Esa idea era mantenida por la física clásica, pero *contradice la relatividad de la simultaneidad*. El reconocimiento del pasado y del futuro como existentes a la vez que el presente sería una exageración aún mayor.

Los sucesos que ocurren en el instante actual no modifican el pasado, no influyen ya en los estados realizados del universo, pero los estados futuros se forman bajo la influencia de los pasados y presentes. Está claro que, en determinado sentido, se puede decir que el futuro influye en el presente, puesto que, al tender a realizar nuestros planes para el futuro, los sometemos a nuestra acción en el presente. Pero, al apelar a la capacidad mental y a las posibilidades

creadoras del hombre, nos salimos del marco del círculo de los fenómenos en el cual desempeñan el papel determinante las leyes de la mecánica y la electrodinámica. Y el mismo hecho de que el hombre o cualquier otro ser vivo pueda, mediante su actividad orientada a un fin (aunque sea inconscientemente), influir en la marcha de los sucesos futuros, dirigiéndolos a uno u otro cauce, confirma que los sucesos futuros aún no se han realizado, no se han manifestado, no existen. Si los puntos de universo futuro se hubieran manifestado, lo mismo que los pasados, una predeterminación rigurosa regiría el desarrollo de los sucesos y nuestra participación en la vida se reduciría sólo al examen pasivo de los estados existentes del universo en un orden determinado. Perdería fundamento y sentido la actividad creadora, la humanidad no tendría ni la menor posibilidad de crear su futuro.

La realidad de la diferencia entre el pasado y el futuro sirve de premisa necesaria para que el proceso del transcurso del tiempo tenga un sentido determinado. La termodinámica caracteriza el sentido positivo del tiempo como el desarrollo espontáneo de los sucesos en el cual aumenta la entropía. He aquí dos ejemplos claros de procesos que transcurren con aumento de la entropía . Al empezar una partida de billar de troneras, las bolas se agrupan formando un triángulo regular, mientras que después

del primer golpe se dispersan desordenadamente por la mesa. La marcha inversa del tiempo conforme a esta situación se expresaría en que las bolas dispersas deberían volver a agruparse y formar el triángulo inicial, lo cual significaría la disminución de la entropía del sistema. Otro ejemplo. La materia de un cigarrillo encendido se hace ceniza y se dispersa en el aire en forma de partículas de humo y productos gaseosos de la combustión (aumento de la entropía). La marcha inversa del tiempo se expresaría en el desarrollo de los sucesos en orden contrario: no sólo las partículas dispersas se reunirían para formar un cigarrillo entero, sino que las reacciones químicas también transcurrirían en sentido contrario, sintetizándose de los productos de la oxidación en partículas de tabaco y de papel (disminución de la entropía).

Reconocer que el pasado se diferencia físicamente del futuro, como lo existente de lo no existente, significa reconocer la realidad del paso de lo no manifiesto a lo manifiesto, es decir, la realidad del proceso de manifestación. Admitiéndola para cada línea de universo por separado, nos vemos obligados a plantear y resolver el problema de la relación entre los procesos de manifestación de las diversas líneas de universo. Es poco probable figurarse el transcurso del tiempo en el universo como si la manifestación de cada línea de universo se realizara de forma completamente ais-

lada, sin relación con otras líneas de universo. Es natural suponer que el proceso de manifestación se caracteriza por determinadas formas espaciales en el universo seudoeuclídeo de Minkowski, que el conjunto de los puntos que en cada línea de universo separan la parte manifiesta de la no manifiesta perfilan un límite determinado entre las regiones manifiesta y no manifiesta del espacio universal. A este límite le llamaremos *frente de manifestación o revelación*. Cada posición fija del frente de manifestación incluye en sí los puntos de universo que pasan a la vez de la no existencia a la existencia, es decir, que son *absolutamente simultáneos*. Como en la ciencia no ha sido objeto de consideración el proceso de manifestación en el universo de Minkowski, no ha surgido la idea del frente de manifestación. Pero el concepto de frente de manifestación acompaña como necesidad lógica a la idea del proceso de manifestación, sin él esta última no puede adquirir suficiente claridad.

Hasta ahora hemos razonado solamente sobre el proceso de revelación de las *líneas de universo*, suponiendo implícitamente que en los intervalos entre ellas no existen objetos materiales y nada tiene que manifestarse. Sin embargo, como se dijo en el § 19, el vector masa puede caracterizar no sólo una línea de universo, sino también una isótropa. Como es natural el vector masa caracteriza no la propia línea

«vacía» como objeto geométrico, sino el proceso físico relacionado con la línea. Las rectas isótropas pasan por cada punto del plano seudoeuclídeo, pero es posible que no cada isótropa sirva de conductor de una acción electromagnética. Y, por lo visto, de un modo semejante a como hay partes manifiestas y no manifiestas de las líneas de universo, deben existir partes manifiestas y no manifiestas de las líneas isótropas. Recordemos que es característico de las isótropas el tener una doble medida de longitud (véase el § 11 después de las fórmulas (2.25)). En sentido métrico la longitud de cualquier segmento de isótropa es nula y puede parecer carente de sentido la idea de un proceso que se realiza a lo largo de una longitud nula. No obstante, en sentido lineal los segmentos de una misma isótropa se diferencian por sus longitudes, lo que permite hablar de la propagación de un proceso a lo largo de una isótropa. El punto de la isótropa hasta el cual llegó el proceso de manifestación adquiere la propiedad física que se caracteriza por el vector masa isótropo, en virtud de lo cual en este punto puede efectuarse la transmisión de la energía y el impulso de la isótropa a una línea de universo, si ésta existe. En aquellos puntos hasta los cuales aún no ha llegado el proceso de manifestación, en primer lugar, no hay nada que transmitir, en segundo, no hay a qué transmitir, puesto que en ellos tampoco existen puntos mani-

fiestos de la línea de universo. Las líneas isótropas, como objetos que se manifiestan, llenan el espacio entre las líneas de universo y, en virtud de eso, se puede representar (a nivel macroscópico) el frente de manifestación en el plano seudoeuclídeo no en forma de conjunto de puntos aislados en las líneas de universo, sino en forma de cierta línea continua, recta o curva.

Aunque los experimentos que nos son asequibles no permiten determinar la dirección del frente de manifestación, se pueden exponer algunas ideas teóricas acerca de esto. La línea, que representa el frente de manifestación en el plano seudoeuclídeo, debe cortar todas las líneas de universo, sin excepción, que se encuentran en este plano. Esta propiedad la tiene toda recta perteneciente a los sectores reales. La posee también la línea curva en que la tangente a cualquiera de sus puntos pertenece a los sectores reales o, dicho de otra forma, la curva en que la normal positiva a cualquiera de sus puntos pertenece al sector superior. El frente rectilíneo se caracteriza por una dirección única del movimiento de manifestación, perpendicular al frente. Al frente curvilíneo le corresponde un conjunto de direcciones perpendiculares a él, por las cuales se propaga el proceso de manifestación.

Esta idea del frente de manifestación no contradice las diferencias geométricas de coordenadas entre el pasado absoluto y el futuro absoluto. Para el observador, cuyo estado se representa en la fig. 28 con el punto de universo O, son futuro absoluto no sólo los puntos de su propia línea de universo, sino también los puntos de otras líneas de universo que se hallan en el sector superior. Por ejemplo, el punto F y todos los puntos más tardíos de la recta PF son futuro absoluto respecto del punto O. Pero precisamente esos puntos son los que no pueden manifestarse en el instante en que el frente de manifestación pasa por el punto O, ya que aquél no sale de los límites del sector real. Sin embargo, en ese instante resultan estar ya inevitablemente manifiestos todos los puntos del sector inferior, que parte del punto O, en particular el punto P y todos los anteriores a él en la recta PF. Para cualquier posición posible del frente de manifestación que pasa por el punto O, aquél tiene que cortar necesariamente el segmento PF en uno de sus puntos interiores, el cual será *absolutamente simultáneo* del punto O. Antes se demostró que para cualquier punto interior del segmento PF se puede encontrar un sistema ortonormalizado de coordenadas en el cual este punto sea simultáneo del punto O. De este modo, la simultaneidad absoluta toma inevitablemente la forma de simultaneidad relativa en algún sistema de coordenadas, aunque no podamos saber en cuál precisamente.

Todos los efectos relativistas, entre ellos la relatividad de la simultaneidad, se de-

de universo respecto de otras. Nuestra experiencia diaria y la experiencia de la mecánica clásica se limita a las líneas de universo cuyas direcciones son próximas («casi paralelas»). En estas condiciones el proceso de manifestación se percibe con realce del carácter absoluto del transcurso del tiempo, y esto explica por qué la ciencia consideraba al principio la simultaneidad como invariante. La idea clásica de la existencia de la simultaneidad absoluta reflejaba correctamente una propiedad fundamental del universo, pero de un modo estrecho, ya que no tenía en cuenta la rica diversidad de formas que toma el proceso absoluto de manifestación. Para la teoría de la relatividad, que chocó con esa diversidad, hubiera sido falta grave la estrechez del extremo contrario, es decir, la negación de la simultaneidad absoluta.

El frente de manifestación, con curvatura general o con torceduras locales, no se puede caracterizar de un modo completo por una dirección del movimiento de manifestación, ya que en cada punto del espacio universal seudoeuclídeo el proceso de manifestación está dirigido en el sentido de la normal positiva al frente. Sin tener la posibilidad de determinar por vía experimental la dirección del frente (los puntos absolutamente simultáneos), no podemos saber la dirección exacta de las normales a él. Sólo es posible medir prácticamente las

longitudes de los trozos manifiestos de algunas líneas de universo. Aunque no se impone limitación alguna a la magnitud numérica del ángulo entre las normales, sus direcciones están demarcadas por las rectas isótropas, de manera que toda normal positiva al frente de manifestación en el plano seudoeuclídeo pertenece a un mismo sector imaginario (que se representa en las figuras en forma de sector superior). Sólo en este sentido podemos referirnos al carácter determinado de la dirección positiva del proceso de manifestación.

Si tiene algún sentido físico real la idea del sentido inverso del transcurso del tiempo, este no puede ser otro que la vuelta atrás del proceso de manifestación por todas las líneas de universo. En este caso hay que figurarse el universo como pulsante. El movimiento directo del frente de manifestación, como resultado del cual crece el «árbol» cósmico de las líneas de universo, al llegar a cierto límite, cambia y se convierte en movimiento de retroceso. Esta fase negativa del ciclo universal debe ser una fase de «reducción» del universo ya manifestado. El frente de manifestación se convierte en frente de «borradura», que retrocede dejando detrás de sí (allí donde en la fase positiva del ciclo se encontrabà la región del futuro no manifiesta) una región progresiva de lo no manifestado. Todos los procesos que en el ciclo directo se desarrollan con aumento de

la entropía, transcurrirán en sentido inverso con disminución de la entropía. Para que de los gases dispersos, humo y ceniza del cigarrillo quemado pueda restablecerse un cigarrilo entero, el proceso de «montaje» debe estar orientado a un fin y regido por una información sobre la estructura y las vías de dispersión del objeto inicial. Pero toda esta información está contenida de forma natural en las líneas de universo manifiestas, la orientación al fin previsto está asegurada por el hecho de que el proceso de «borradura» marcha por las vías antes trazadas y no puede conducir más que a aquellos puntos que fueron de partida en el proceso de manifestación.

CAPÍTULO 4

Espacio tridimensional seudoeuclídeo

Hasta aquí hemos estudiado el universo de Minkowski en una sección plana, lo que nos ha permitido simplificar el aparato matemático y presentar de forma más clara la interpetación geométrica de los efectos de la teoría especial de la relatividad. No obstante, esa simplificación empobrece la visión del universo. Para comprender por qué el espacio universal nos parece tridimensional y euclídeo propio es necesario pasar al modelo tetradimensional del universo de Minkowski, pero antes vamos a examinar, en calidad de etapa intermedia, el espacio seudoeuclídeo tridimensional.

§ 22. Estructura del espacio seudoeuclídeo tridimensional

El espacio seudoeuclídeo tridimensional es una variedad de espacio lineal tridimensional. Se recordará que el espacio lineal tiene propiedades métricas, si en él se ha

definido la operación del producto escalar de sus elementos (véase el § 6). Las propiedades métricas del espacio se pueden caracterizar de un modo completo por medio de las relaciones métricas entre los vectores de la base. Para que las propiedades métricas de un espacio lineal sean seudoeuclídeas, en la base del espacio debe haber tanto vectores de longitud real como vectores de longitud imaginaria. Para un espacio tridimensional esta condición puede cumplirse de dos maneras:

1) dos vectores básicos tienen longitud real y el tercero la tiene imaginaria;

2) un vector básico tiene longitud real y los otros dos, imaginaria.

En esencia las dos variantes dan el mismo tipo de relaciones métricas. Basta multiplicar en la segunda variante todos los vectores básicos por la unidad imaginaria, para reducirla a la primera. Por esa misma razón un espacio en el cual los tres vectores básicos tienen longitud imaginaria posee las propiedades métricas del espacio euclídeo propio.

Así, pues, sobre la base de un espacio lineal tridimensional sólo puede construirse, en realidad, un tipo de espacio seudoeuclídeo. Vamos a definir este espacio mediante la base ortonormalizada que se caracteriza por la tabla de productos escalares siguiente:

$$\begin{pmatrix} \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1\rangle & \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\rangle & \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3\rangle \\ \langle \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1\rangle & \langle \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2\rangle & \langle \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\rangle \\ \langle \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1\rangle & \langle \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2\rangle & \langle \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_3\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{4.1}$$

La tabla (4.1) significa que los vectores $\mathbf{e}_1$ y $\mathbf{e}_2$ son unitarios reales:

$$|\mathbf{e}_1| = \sqrt{\langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1\rangle} = \sqrt{1} = 1,$$
$$|\mathbf{e}_2| = \sqrt{\langle \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2\rangle} = \sqrt{1} = 1.$$

y el vector $\mathbf{e}_3$ es unitario imaginario:

$$|\mathbf{e}_3| = \sqrt{\langle \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_3\rangle} = \sqrt{-1} = i$$

y dos vectores cualesquiera de la base $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ son perpendiculares entre sí.

La base ortonormalizada $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ en combinación con el punto fijo O (polo) forma el sistema ortonormalizado de coordenadas $OXYZ$ (fig. 29). El plano de coordenadas OXY tiene la base formada únicamente de los vectores de longitud real $\mathbf{e}_1$ y $\mathbf{e}_2$ y su métrica es euclídea propia. En los planos de coordenadas OXZ y OYZ uno de los vectores básicos ($\mathbf{e}_3$) tiene la longitud expresada por un número imaginario y la métrica de estos planos es seudoeuclídea.

Escribamos la descomposición de los vectores arbitrarios **a** y **b** del espacio seu-

según la base ortonormalizada:

$$\mathbf{a} = \alpha_1\mathbf{e}_1 + \alpha_2\mathbf{e}_2 + \alpha_3\mathbf{e}_3,$$
$$\mathbf{b} = \beta_1\mathbf{e}_1 + \beta_2\mathbf{e}_2 + \beta_3\mathbf{e}_3 \qquad (4.2)$$

y calculemos el producto escalar $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$

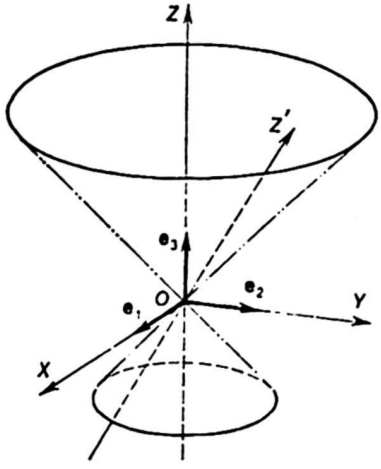


Fig. 29

teniendo en cuenta la tabla (4.1):

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = {} & \alpha_1\beta_1 \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1 \rangle + \alpha_1\beta_2 \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \rangle + \\ & + \alpha_1\beta_3 \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3 \rangle + \alpha_2\beta_1 \langle \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1 \rangle + \\ & + \alpha_2\beta_2 \langle \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2 \rangle + \alpha_2\beta_3 \langle \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 \rangle + \\ & + \alpha_3\beta_1 \langle \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1 \rangle + \alpha_3\beta_2 \langle \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2 \rangle + \\ & + \alpha_3\beta_3 \langle \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_3 \rangle = \\ & = \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 - \alpha_3\beta_3. \qquad (4.3)\end{aligned}$$

Aplicando la fórmula (4.3) al producto escalar del vector por sí mismo, hallamos la longitud (módulo) del vector

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle} = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 - \alpha_3^2}. \qquad (4.4)$$

Las coordenadas del radio vector $\mathbf{r}$ en el sistema ortonormalizado de coordenadas $OXYZ$ las designaremos por medio de las letras x, y, z y las llamaremos coordenadas del punto M, indicado por el radio vector:

$$\mathbf{r} = \overline{OM} = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 + z\mathbf{e}_3. \qquad (4.5)$$

La longitud del radio vector, de acuerdo con (4.4), será

$$|\mathbf{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 - z^2}. \qquad (4.6)$$

Esta longitud se anula si las coordenadas satisfacen la condición

$$x^2 + y^2 - z^2 = 0, \text{ o bien } x^2 + y^2 = z^2 \qquad (4.7)$$

La relación (4.7) determina en el espacio seudoeuclídeo tridimensional el lugar geométrico de los puntos cuyos radios vectores son *isótropos*. Este lugar geométrico de puntos representa en sí ya no dos rectas, como en el plano seudoeuclídeo, sino una superficie. Esta superficie no existe en el espacio euclídeo tridimensional propio.

Para dar claridad, aunque sólo sea convencionalmente, a la descripción de las propiedades métricas del espacio seudoeuclídeo tridimensional, vamos a aplicarlo

sobre el espacio euclídeo tridimensional propio, aprovechando para ello la coincidencia de las propiedades lineales de estos espacios. Si a cada punto de coordenadas x, y, z en el espacio seudoeuclídeo lo ponemos en correspondencia con un punto de las mismas coordenadas en el espacio euclídeo propio, obtenemos la aplicación biunívoca de un espacio sobre otro, conservando las propiedades lineales. Precisamente esta aplicación es la que se representa en la fig. 29. Las propiedades métricas del espacio seudoeuclídeo sólo pueden ser transmitidas convencionalmente en esta aplicación. A la ecuación (4.7), que determina el conjunto de los radios vectores isótropos que hay en el espacio seudoeuclídeo, corresponde en el espacio euclídeo propio, referido al sistema de coordenadas ortonormalizado, la superficie del cono circular recto de eje OZ. Por eso la propia superficie que se aplica (4.7) se llama también cono, o *cono isótropo*, en el espacio seudoeuclídeo.

La región interior del cono isótropo (4.7), es decir, la región que contiene el eje OZ, se define por la desigualdad

$$x^2 + y^2 - z^2 < 0, \text{ o bien } x^2 + y^2 < z^2. \tag{4.8}$$

La longitud de todo radio vector perteneciente a la región interior del cono isótropo se expresa por un número imaginario. La región interior consta de dos huecos. El hueco cuyos puntos tienen positiva la

coordenada z ($z > 0$) se llama hueco superior.

La región exterior del cono isótropo (4.7) se describe por la desigualdad

$$x^2 + y^2 - z^2 > 0, \text{ o bien } x^2 + y^2 > z^2. \tag{4.9}$$

La longitud de todo radio vector perteneciente a la región exterior del cono isótropo se expresa por un número real.

Las relaciones (4.7), (4.8) y (4.9) sirven de criterios de clasificación, por los cuales todos los vectores del espacio seudoeuclídeo tridimensional pueden pertenecer a uno de los tres tipos siguientes. Si el vector

$$\mathbf{a} = \alpha_1 \mathbf{e}_1 + \alpha_2 \mathbf{e}_2 + \alpha_3 \mathbf{e}_3,$$

donde quiera que se encuentre su punto de origen, es colinear de cualquier radio vector $\mathbf{r}_0$ ($\mathbf{a} = \lambda \mathbf{r}_0$), sus coordenadas satisfacen una relación del tipo (4.7):

$$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 - \alpha_3^2 = (\lambda x_0)^2 + (\lambda y_0)^2 - (\lambda z_0)^2 = \\ = \lambda^2 (x_0^2 + y_0^2 - z_0^2) = \lambda^2 \cdot 0 = 0$$

y el vector a es isótropo. Análogamente, de todo vector colinear de cualquier radio vector de la región interior del cono isótropo (4.7), diremos que pertenece a la región interior (el módulo de este vector se expresará por un número imaginario). Y de todo vector, cuyo módulo se exprese por un número real, diremos que pertenece a la región exterior del cono isótropo.

En el espacio tridimensional seudoeuclídeo, lo mismo que en el espacio euclídeo propio, un plano se determina unívocamente por la normal a él y un punto perteneciente al plano. Consideremos el conjunto de todos los radios vectores $\mathbf{r} = \overrightarrow{OM}$, perpendiculares al vector $\mathbf{a}$. Este conjunto se define por la ecuación

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{r} \rangle = 0, \qquad (4.10)$$

que en forma de coordenadas, de acuerdo con (4.3) toma el aspecto

$$\alpha_1 x + \alpha_2 y - \alpha_3 z = 0. \qquad (4.11)$$

En el espacio tridimensional euclídeo propio a la ecuación (4.11) corresponde un plano que pasa por el origen de coordenadas. Pero la pertenencia de un conjunto de puntos a un plano es una propiedad lineal del espacio, y las propiedades lineales son iguales en el espacio euclídeo propio y en el seudoeuclídeo. Por lo tanto, los puntos cuyas coordenadas satisfacen la ecuación (4.11) se encuentran también en un plano en el espacio seudoeuclídeo. Éste es un plano que pasa por el origen de coordenadas y es perpendicular al vector $\mathbf{a}$.

Si el vector $\mathbf{a}$ pertenece a la región interior del cono isótropo, es decir, si para sus coordenadas se cumple la condición

$$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 - \alpha_3^2 < 0, \text{ o bien } \alpha_3^2 > \alpha_1^2 + \alpha_2^2 \geqslant 0, \qquad (4.12)$$

todos los radio vectores perpendiculares al vector $\mathbf{a}$ tienen longitudes que se expresan por números reales, como puede comprobarse. Escribamos la ecuación (4.11) en la forma

$$z = \frac{\alpha_1 x + \alpha_2 y}{\alpha_3}. \qquad (4.13)$$

Esto puede hacerse, puesto que $\alpha_3 \neq 0$ (véase (4.12)). Sustituyendo la expresión (4.13) en (4.6), hallamos la longitud del radio vector $\mathbf{r}$ de un punto arbitrario del plano (4.11):

$$|\mathbf{r}|^2 = x^2 + y^2 - z^2 = x^2 + y^2 - \frac{(\alpha_1 x + \alpha_2 y)^2}{\alpha_3^2} =$$
$$= x^2 + y^2 - \left(\frac{\alpha_1^2}{\alpha_3^2} x^2 + 2 \frac{\alpha_1 \alpha_2}{\alpha_3^2} xy + \frac{\alpha_2^2}{\alpha_3^2} y^2 \right) =$$
$$= x^2 \left(1 - \frac{\alpha_1^2}{\alpha_3^2} \right) + y^2 \left(1 - \frac{\alpha_2^2}{\alpha_3^2} \right) - 2 \frac{\alpha_1 \alpha_2}{\alpha_3^2} xy. \qquad (4.14)$$

La condición (4.12) impuesta al vector $\mathbf{a}$ se puede escribir en la forma

$$1 > \frac{\alpha_1^2}{\alpha_3^2} + \frac{\alpha_2^2}{\alpha_3^2}$$

y obtener de ella las desigualdades equivalentes

$$1 - \frac{\alpha_1^2}{\alpha_3^2} > \frac{\alpha_2^2}{\alpha_3^2}, \quad 1 - \frac{\alpha_2^2}{\alpha_3^2} > \frac{\alpha_1^2}{\alpha_3^2}.$$

Introduciendo estas desigualdades en (4.14), hallamos que

$$|\mathbf{r}|^2 > x^2 \frac{\alpha_2^2}{\alpha_3^2} + y^2 \frac{\alpha_1^2}{\alpha_3^2} - 2 \frac{\alpha_1 \alpha_2}{\alpha_3^2} xy =$$

$$= \left(x \frac{\alpha_2}{\alpha_3} - y \frac{\alpha_1}{\alpha_3} \right)^2.$$

Como la expresión entre paréntesis es un número real, su cuadrado no puede ser un número negativo. Por lo tanto

$$|\mathbf{r}|^2 > 0.$$

Esto significa, en primer lugar, que entre los radios vectores r pertenecientes al plano (4.10) no hay ninguno cuya longitud se exprese por un número imaginario. En segundo, entre ellos no hay vectores *no nulos* cuya longitud sea igual a cero, es decir, no hay vectores isótropos. Por lo tanto, todos los radios vectores no nulos de los puntos del plano (4.10) pertenecen a la región exterior del cono isótropo. El punto origen de coordenadas tiene radio vector nulo y pertenece al cono isótropo. Por eso está excluido del conjunto de puntos que satisfacen la desigualdad $|\mathbf{r}|^2 > 0$. Pero el origen de coordenadas pertenece al plano (4.10), puesto que el radio vector $\mathbf{r} = 0$ satisface la ecuación de este plano. Así, hemos demostrado que para todo vector **a**, perteneciente a la región interna del cono isótropo, existe un plano perpendicular a él en el cual no hay vectores de longitud

imaginaria ni vectores isótropos, sino únicamente vectores de longitud real. Ese plano tiene métrica euclídea propia.

Se puede demostrar que un plano tiene métrica seudoeuclídea si la normal a él pertenece a la región externa del cono isótropo.

Un plano, cuya normal es un vector isótropo, contiene esta normal (porque el vector isótropo es perpendicular a sí mismo) y es tangente al cono isótropo. Este plano se dice que es *isótropo*. La falta de espacio nos impide estudiar las peculiares propiedades métricas del plano isótropo, las cuales se diferencian de las propiedades del plano euclídeo propio y del plano seudoeuclídeo.

El sistema ortonormalizado de coordenadas en el espacio seudoeuclídeo tridimensional se puede elegir con alto grado de arbitrariedad. Si se tienen en cuenta las aplicaciones físicas, el versor unidad imaginario $\mathbf{e}_3'$ debe elegirse de manera que pertenezca al hueco interno superior del cono isótropo. En un plano euclídeo propio, perpendicular al versor $\mathbf{e}_3'$, se pueden elegir arbitrariamente dos versores perpendiculares entre sí $\mathbf{e}_1'$ y $\mathbf{e}_2'$.

Como la longitud de todo vector del espacio seudoeuclídeo tridimensional es una magnitud invariante, la propiedad de determinados vectores no nulos de tener longitud igual a cero no depende del sistema de coordenadas elegido. Por lo tanto, todo

vector que sea isótropo en un sistema de coordenadas, lo será también en cualquier otro sistema de coordenadas. Por eso el cono isótropo es una construcción invariante del espacio seudoeuclídeo tridimensional y tiene una propiedad muy importante: todo plano perpendicular a cualquier recta, perteneciente a la región interna del cono isótropo, corta a éste según una circunferencia euclídea propia ordinaria. Consideremos dos sistemas ortonormalizados de coordenadas $OXYZ$ y $OX'Y'Z'$ con origen común en el punto O. El cono isótropo con vértice en el punto O se describe en el sistema de coordenadas sin apóstrofos por medio de la ecuación

$$x^2 + y^2 = z^2.$$

El plano $z = h$, perpendicular al eje OZ, tiene la métrica euclídea propia y corta al cono isótropo según la curva

$$\begin{cases} x^2+y^2=z^2 \\ z=h \end{cases} \Rightarrow x^2+y^2=h^2.$$

que es una circunferencia con centro en el eje OZ. En el sistema de coordenadas con apóstrofos $OX'Y'Z'$ este mismo cono isótropo se describe por la ecuación

$$(x')^2 + (y')^2 = (z')^2.$$

El plano $z' = h$, perpendicular al eje OZ', también es un plano euclídeo propio y corta

al cono isótropo por la circunferencia

$$\begin{cases} (x')^2+(y')^2=(z')^2 \\ z'=h \end{cases} \Rightarrow (x')^2+(y')^2=h^2.$$

En el espacio euclídeo propio el cono que tiene por base un círculo y cuyo vértice se encuentra en la perpendicular a éste, levantada desde su centro, se llama cono circular recto. La perpendicular mencionada es el eje de simetría, además dicho cono no tiene otros ejes de simetría. Aplicando esta imagen al cono isótropo llegamos a la conclusión de que toda recta perteneciente a la región interior del cono isótropo es eje de simetría de éste. Y de un modo semejante a como en el espacio bidimensional (plano) seudoeuclídeo podemos representar cualquier par de rectas perpendiculares entre sí bajo un ángulo $\pi/2$ sobre el plano euclídeo propio del dibujo (véase la fig. 13), así, en la aplicación del espacio seudoeuclídeo tridimensional sobre el espacio euclídeo tridimensional propio, podemos representar cualquier eje OZ en forma de perpendicular al plano OXY, y el cono isótropo, en forma de cono circular recto en este sistema de coordenadas.

§ 23. Explicación del efecto Compton

En el espacio tridimensional seudoeuclídeo la línea de universo tiene la propiedad de que un vector, tangente a ella en cualquier punto, pertenece al hueco interior

del cono isótropo. El frente de manifestación en este espacio puede ser una superficie tal, que la normal a cada punto de ella pertenezca a la región interna del cono isótropo. Un plano tangente al frente de manifestación en un punto cualquiera, será portador de la métrica euclídea propia y pertenecerá a la región externa del cono isótropo. El movimiento del frente de manifestación nos lo podemos figurar como la traslación de cada punto de su superficie en el sentido de la normal positiva, considerando positiva la normal dirigida hacia el hueco *superior* interno del cono isótropo.

Vamos a utilizar este modelo geométrico de universo para explicar la dispersión de los fotones en los electrones libres, es decir, en aquellos electrones que no participan en la composición de sistemas complejos (átomos o moléculas). Supongamos que la línea de universo de un electrón libre se caracteriza por el vector masa **m**. Uno de los rasgos característicos y estables del electrón como partícula elemental es el de tener una cantidad determinada de masa en reposo. Esto significa que cualesquiera que sean los posibles cambios de dirección del vector masa **m** del electrón, su módulo no varía: $|\mathbf{m}| = im_0$. Al chocar con un fotón, el electrón no lo puede absorber, como haría un átomo, porque si lo absorbiera cambiaría el módulo del vector masa del electrón. Llamemos **l** al vector masa de la recta isótropa a que está ligado el

fotón antes de la colisión; **l***, al vector masa de la recta isótropa con la cual se liga el fotón después del choque: y **m***, al vector masa del electrón también después del choque. De llave para resolver este problema sirve la ley de conservación del vector masa total del sistema aislado electrón—fotón

$$\mathbf{m} + \mathbf{l} = \mathbf{m}^* + \mathbf{l}^* \qquad (4.15)$$

y la condición de conservación de la masa en reposo del electrón

$$|\mathbf{m}| = |\mathbf{m}^*| = |im_0|. \qquad (4.16)$$

Tomamos como origen O, del sistema de coordenadas $OXYZ$ del espacio tridimensional seudoeuclídeo, el punto de universo en que chocan el electrón y el fotón, y damos al eje OZ una dirección colinear a la del vector masa **m** (fig. 30). La descomposición del vector **m** según la base de este sistema de coordenadas tiene la forma

$$\mathbf{m} = \mu_1\mathbf{e}_1 + \mu_2\mathbf{e}_2 + \mu_3\mathbf{e}_3 = 0\cdot\mathbf{e}_1 + 0\cdot\mathbf{e}_2 = \\ = m_0\mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ m_0 \end{pmatrix}. \qquad (4.17)$$

Tomamos el eje OX de manera que la isótropa caracterizada por el vector masa **l** pertenezca al plano OXZ y la proyección del vector **l** sobre el eje OX sea positiva.

En estas condiciones, y teniendo en cuenta (3.56) y (3.59), se puede escribir la des-

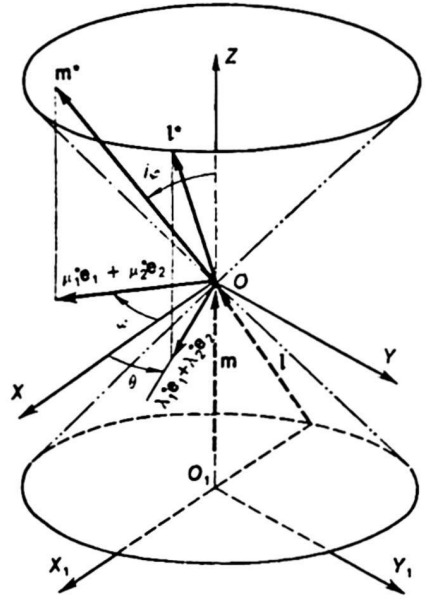


Fig. 30

composición del vector **l**, según la base, como sigue:

$$\mathbf{l} = \lambda_1 \mathbf{e}_1 + \lambda_2 \mathbf{e}_2 + \lambda_3 \mathbf{e}_3 = \lambda_3 (\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3) =$$

$$= \frac{h\nu}{c^2} (\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3) = \frac{h\nu}{c^2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (4.18)$$

Aquí ν es la frecuencia del fotón antes de chocar con el electrón.

En el sistema de coordenadas elegido, el ángulo acimutal (medido en el plano euclídeo propio OXY) del vector **l** es nulo, y el vector **m**, colineal del eje OZ, no tiene valor determinado del ángulo acimutal. El vector masa resultante $m + \mathbf{l}$ pertenece al plano OXZ y su ángulo acimutal también es igual a cero. El choque con el electrón hace que el fotón pase a otra isótropa, caracterizada por el ángulo acimutal θ. Como el acimut del vector masa resultante no varía en el choque (véase (4.15)), la desviación del vector **l*** en el ángulo θ según el acimut debe ser compensada con el ángulo acimutal ω del vector **m***. Para que el vector **m*** adquiera un valor determinado del ángulo acimutal en el sistema de coordenadas $OXYZ$, debe desviarse del eje OZ un ángulo $i\varphi \neq i0$ (el electrón adquiere velocidad). Por lo visto, el choque hace que varíe la frecuencia del fotón, y, al nuevo valor de esta frecuencia le llamamos ν^*. Entonces la descomposición del vector masa isótropo **l*** según la base $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ toma la forma siguiente:

$$\mathbf{l}^* = \lambda_1^* \mathbf{e}_1 + \lambda_2^* \mathbf{e}_2 + \lambda_3^* \mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} \lambda_1^* \\ \lambda_2^* \\ \lambda_3^* \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{h\nu^*}{c^2} \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \operatorname{sen}\theta \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (4.19)$$

De la igualdad (4.15) hallamos el vector masa $\mathbf{m}^*$:

$$\mathbf{m}^* = \mathbf{m} + \mathbf{l} - \mathbf{l}^*$$

y sustituimos los vectores por sus columnas de coordenadas (4.17), (4.18) y (4.19):

$$\mathbf{m}^* = \begin{pmatrix} \mu_1^* \\ \mu_2^* \\ \mu_3^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ m_0 \end{pmatrix} + \frac{h\nu}{c^2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{h\nu^*}{c^2} \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \operatorname{sen}\theta \\ 1 \end{pmatrix}.$$

De aquí obtenemos las expresiones de las coordenadas del vector $\mathbf{m}^*$ mediante las respectivas coordenadas de los vectores $\mathbf{m}$, $\mathbf{l}$ y $\mathbf{l}^*$:

$$\mu_1^* = \frac{h}{c^2}(\nu - \nu^* \cos\theta), \quad \mu_2^* = -\frac{h}{c^2}\nu^* \operatorname{sen}\theta, \tag{4.20}$$

$$\mu_3^* = m_0 + \frac{h}{c^2}(\nu - \nu^*).$$

Las coordenadas del vector $\mathbf{m}^*$ deben satisfacer la condición (4.16) de conservación del módulo del vector masa:

$$(\mu_1^*)^2 + (\mu_2^*)^2 - (\mu_3^*)^2 = |\mathbf{m}^*|^2 = (im_0)^2 = -m_0^2.$$

Sustituyendo aquí la expresión (4.20):

$$\frac{h^2}{c^4}(\nu^2 - 2\nu\nu^* \cos\theta + \nu^{*2}\cos^2\theta + \nu^{*2}\operatorname{sen}^2\theta) - m_0^2 - 2m_0\frac{h}{c^2}(\nu - \nu^*) - \frac{h^2}{c^4}(\nu^2 - 2\nu\nu^* + \nu^{*2}) = -m_0^2,$$

hallamos la frecuencia ν^* del fotón después del choque:

$$\frac{h^2}{c^4} \cdot 2\nu\nu^*(1 - \cos\theta) - 2m_0\frac{h}{c^2}(\nu - \nu^*) = 0,$$

$$\nu^*\left[\frac{h}{c^2}\nu(1 - \cos\theta) + m_0\right] = m_0\nu,$$

$$\nu^* = \frac{\nu}{\frac{h\nu}{c^2 m_0}(1 - \cos\theta) + 1}. \tag{4.21}$$

Introduciendo en la relación (4.21) las expresiones de las frecuencias de las radiaciones incidente y dispersada, mediante las longitudes de onda

$$\nu = \frac{c}{\lambda}, \quad \nu^* = \frac{c}{\lambda^*},$$

obtenemos

$$\frac{1}{\lambda^*} = \frac{1}{\lambda\left[\frac{h}{c\lambda m_0}(1 - \cos\theta) + 1\right]},$$

$$\lambda^* = \frac{h}{m_0 c}(1 - \cos\theta) + \lambda,$$

$$\Delta\lambda \quad \lambda \quad \lambda \quad {}_{m_0c}\,(1 \quad \cos 0)$$

$$= \frac{2h}{m_0 c} \operatorname{sen}^2 \frac{\theta}{2}. \qquad (4.22)$$

La relación (4.22) fue descubierta por el físico norteamericano Arthur Compton y comprobada por él mismo en experimentos de dispersión de rayos X en los electrones del grafito [21].

CAPITULO 5

Universo tetradimensional de Minkowski

«... el mundo es más rico, más vivo, más variado de lo que parece, pues cada paso en el desarrollo de la ciencia descubre en él nuevos aspectos.»

V. I. Lenin

§ 24. Hiperplano

Sobre la base del espacio lineal tetra o cuatridimensional se pueden construir diversos tipos de espacios seudoeuclídeos. Si entre los cuatro vectores de la base $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$, $\mathbf{e}_4$ de este espacio uno de ellos tiene la longitud expresada por un número imaginario y las longitudes de los otros tres vectores se expresan con números reales, a este espacio se le asigna el índice 1. Multiplicando por la unidad imaginaria las longitudes de todos los vectores básicos del espacio seudoeuclídeo cuatridimensional de índice 1, se obtiene el espacio de índice 3, que, en realidad, tiene las mismas propiedades métricas. Herman Minkowski comprendió que el espacio universal real posee las mismas propiedades lineales y métricas que el espacio seudoeuclídeo cuatridimensional de índice 1. Para simplificar llamaremos también a este espacio, espacio de Minkowski. Y como queremos tomar en

consideración no sólo las propiedades geométricas, sino también los objetos y procesos físicos en el espacio universal, emplearemos el término de «universo de Minkowski».

La base ortonormalizada del espacio seudoeuclídeo cuatridimensional de índice 1 la vamos a caracterizar por la siguiente tabla de productos escalares de los vectores:

$$\begin{pmatrix} \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1\rangle & \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\rangle & \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3\rangle & \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_4\rangle \\ \langle \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1\rangle & \langle \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2\rangle & \langle \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\rangle & \langle \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_4\rangle \\ \langle \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1\rangle & \langle \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2\rangle & \langle \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_3\rangle & \langle \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4\rangle \\ \langle \mathbf{e}_4, \mathbf{e}_1\rangle & \langle \mathbf{e}_4, \mathbf{e}_2\rangle & \langle \mathbf{e}_4, \mathbf{e}_3\rangle & \langle \mathbf{e}_4, \mathbf{e}_4\rangle \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \qquad (5.1)$$

La tabla (5.1) nos dice que dos vectores distintos cualesquiera de esta base son perpendiculares entre sí y sus longitudes tienen los valores siguientes:

$$|\mathbf{e}_1| = \sqrt{\langle \mathbf{e}_1\, \mathbf{e}_1\rangle} = \sqrt{1} = 1, \quad |\mathbf{e}_2| = 1, \\ |\mathbf{e}_3| = 1, \quad |\mathbf{e}_4| = \sqrt{-1} = i. \qquad (5.2)$$

Escribimos la descomposición de los vectores arbitrarios a y b del espacio de

Minkowski, según la base ortonormalizada $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4$:

$$\mathbf{a} = \alpha_1\mathbf{e}_1 + \alpha_2\mathbf{e}_2 + \alpha_3\mathbf{e}_3 + \alpha_4\mathbf{e}_4, \\ \mathbf{b} = \beta_1\mathbf{e}_1 + \beta_2\mathbf{e}_2 + \beta_3\mathbf{e}_3 + \beta_4\mathbf{e}_4 \qquad (5.3)$$

y calculamos el producto escalar $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b}\rangle$ teniendo en cuenta la tabla (5.1):

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b}\rangle = \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3 - \alpha_4\beta_4. \qquad (5.4)$$

Por la definición general (1.29), el módulo de un vector es igual a la raíz cuadrada del producto escalar del vector por sí mismo. En el espacio de Minkowski el módulo de un vector se expresa por medio de sus coordenadas del modo siguiente:

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{\langle \mathbf{a}, \mathbf{a}\rangle} = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 - \alpha_4^2}. \qquad (5.5)$$

Elegimos en el espacio un punto que haga las veces de polo O. El conjunto de la base ortonormalizada, caracterizada por la tabla (5.1), y el polo O forma el sistema ortonormalizado de coordenadas $OXYZW$. Las coordenadas de un radio vector r en este sistema las designaremos con las letras x, y, z, w y las llamaremos coordenadas del punto M, indicado por el extremo del radio vector:

$$\mathbf{r} = \overline{OM} = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 + z\mathbf{e}_3 + w\mathbf{e}_4. \qquad (5.6)$$

Veamos lo que representa en el espacio cuatridimensional de Minkowski el conjunto de los puntos cuyos radios vectores son perpendiculares al versor básico $\mathbf{e}_4$ (eje *OW*). De la escritura vectorial de esta condición de perpendicularidad

$$\langle \mathbf{e}_4, \mathbf{r} \rangle = 0$$

pasamos a la expresión en coordenadas

$$\begin{aligned} &\langle \mathbf{e}_4, x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 + z\mathbf{e}_3 + w\mathbf{e}_4 \rangle = 0, \\ &x \langle \mathbf{e}_4, \mathbf{e}_1 \rangle + y \langle \mathbf{e}_4 \mathbf{e}_2 \rangle + \\ &\quad + z \langle \mathbf{e}_4, \mathbf{e}_3 \rangle + w \langle \mathbf{e}_4, \mathbf{e}_4 \rangle = 0, \\ &x \cdot 0 + y \cdot 0 + z \cdot 0 + w \cdot (-1) = 0, \\ &\qquad w = 0. \end{aligned} \tag{5.7}$$

Aquí se ve claramente que la condición de perpendicularidad del radio vector $\mathbf{r}$ al versor básico $\mathbf{e}_4$ es la igualdad a cero de la cuarta coordenada del vector. En este caso sus tres primeras coordenadas x, y, z pueden tomar valores cualesquiera, sin depender unas de otras, desde $-\infty$ hasta $+\infty$. Pero el conjunto de todas las combinaciones lineales posibles de la forma

$$x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 + z\mathbf{e}_3 + 0 \cdot \mathbf{e}_4 = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 + z\mathbf{e}_3$$

constituye un espacio tridimensional. Por lo tanto, el lugar geométrico de los puntos definido por la ecuación (5.7) en el espacio cuatridimensional, es un espacio tridimensional, y como todo vector perteneciente a él es perpendicular al vector básico $\mathbf{e}_4$, se dice que este espacio tridimensional

en conjunto es perpendicular a la dirección $\mathbf{e}_4$ (eje *OW*).

No vamos a intentar dar una representación intuitiva del espacio cuatridimensional. Es natural que se puede construir un dibujo convencional con cuatro ejes de coordenadas, pero eso no contribuye a esclarecer los objetos geométricos que no percibimos visualmente. Nunca hemos visto el espacio tridimensional «desde fuera» y no podemos figurarnos hacia donde está dirigida la perpendicular a ese espacio. Es mejor elegir otro camino. En las relaciones analíticas, que definen los objetos geométricos del universo tetradimensional en forma vectorial o de coordenadas, no es difícil notar la semejanza con las definiciones analíticas conocidas de los objetos del universo tridimensional. Precisamente imágenes intuitivas del universo tridimensional son las que vamos a utilizar como apoyo para facilitar la formación de las ideas acerca del universo tetradimensional sobre la base de las fórmulas matemáticas. Por ejemplo, una ecuación del tipo (5.7) define, en el caso del espacio tridimensional, un plano perpendicular al eje de coordenadas *W*. Pero un plano es un conjunto bidimensional de puntos, mientras que nosotros tenemos que habérnoslas con el conjunto tridimensional descrito por la ecuación (5.7). Para subrayar la semejanza de este conjunto con el plano y la diferencia de él, se le da el nombre de *hiperplano*.

La base del plano consta de dos vectores, la del hiperplano en el espacio cuatridimensional, de tres vectores. En particular, la del hiperplano (5.7) la forman los vectores $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ que entran en la composición de la base ortonormalizada del espacio cuatridimensional de Minkowski. Como quiera que la longitud de estos tres vectores se expresa por números reales, llegamos a la conclusión de que el hiperplano (5.7) tiene métrica euclídea propia, es decir, es un espacio tridimensional euclídeo propio bien conocido.

Tomemos en el eje OW un punto cualquiera P, distinto del punto origen de coordenadas O. Las tres primeras coordenadas del punto P serán nulas, y la cuarta, distinta de cero: $w_P \neq 0$. Escribamos la columna de coordenadas del radio vector $\mathbf{r}_P$ del punto P:

$$\mathbf{r}_P = 0\cdot\mathbf{e}_1 + 0\cdot\mathbf{e}_2 + 0\cdot\mathbf{e}_3 + w_P\cdot\mathbf{e}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ w_P \end{pmatrix}.$$

La diferencia entre cualquier radio vector $\mathbf{r} = \overline{OM}$ y el radio vector $\mathbf{r}_P = \overline{OP}$ es un vector fijo que tiene su origen en el punto P:

$$\overline{PM} = \overline{OM} - \overline{OP} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_P = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} -$$

$$- \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ w_P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w - w_P \end{pmatrix}.$$

Aquellos vectores $\overline{PM}$ que son perpendiculares al versor básico $\mathbf{e}_4$ satisfacen la ecuación vectorial

$$\langle \mathbf{e}_4, \mathbf{r} - \mathbf{r}_P \rangle = 0.$$

Esta ecuación se expresa en forma de coordenadas como sigue:

$$\begin{gathered} \langle \mathbf{e}_4,\ x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 + z\mathbf{e}_3 + \\ + (w - w_P)\,\mathbf{e}_4 \rangle = 0, \\ x\cdot 0 + y\cdot 0 + z\cdot 0 + \\ + (w - w_P)(-1) = 0, \\ w - w_P = 0, \end{gathered}$$

$$w = w_P. \tag{5.8}$$

Como en el ejemplo anterior, la condición de perpendicularidad de los vectores $\overline{PM}$ al eje OW se redujo a la anulación de su cuarta coordenada $w - w_P$, y las tres primeras coordenadas x, y, z de estos vectores pueden tomar valores cualesquiera. Los puntos indicados por los extremos de los vectores $\overline{PM}$, sujetos a la condición (5.8), forman un conjunto tridimensional que también es un hiperplano perpendicular al eje OW. En el hiperplano (5.8) no hay ni un solo punto del hiperplano (5.7),

ya que todos los puntos del hiperplano (5.7) tienen la cuarta coordenada w nula y no pueden satisfacer la ecuación (5.8). Por consiguiente, los hiperplanos (5.7) y (5.8) no se cortan y deben ser llamados paralelos entre sí. Análogamente a como nos figuramos el espacio tridimensional constituido por capas planas paralelas o en forma de un conjunto infinito de planos paralelos. «ensartados» en una recta perpendicular a ellos, así hay que representarse el espacio cuatridimensional en forma de un conjunto infinito de hiperplanos (espacios tridimensionales) paralelos entre sí, «ensartados» en el eje OW perpendicular a ellos.

Consideremos ahora un conjunto de radios vectores perpendiculares al versor básico $\mathbf{e}_1$ (eje OX). En forma vectorial esta condición de perpendicularidad se expresa por medio de la ecuación:

$$\langle \mathbf{e}_1, \mathbf{r} \rangle = 0,$$

y en forma de coordenadas toma el aspecto siguiente:

$$x \cdot 1 + y \cdot 0 + z \cdot 0 + w \cdot 0 = 0,$$

$$x = 0. \qquad (5.9)$$

Los radios vectores del conjunto examinado tienen la primera coordenada nula, y las otras tres pueden tomar, independientemente unas de otras, valores arbitrarios

desde $-\infty$ hasta $+\infty$. El conjunto de todas las combinaciones lineales

$$0 \cdot \mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 + z\mathbf{e}_3 + w\mathbf{e}_4 = y\mathbf{e}_2 + z\mathbf{e}_3 + w\mathbf{e}_4$$

es un espacio tridimensional (hiperplano), en el cual los vectores linealmente independientes $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$, $\mathbf{e}_4$ desempeñan el papel de base. Como las longitudes de los vectores $\mathbf{e}_2$ y $\mathbf{e}_3$ se expresan con números reales y la del vector $\mathbf{e}_4$, con un número imaginario, concluimos que el hiperplano (5.9) tiene métrica seudoeuclídea, es decir, es un espacio seudoeuclídeo tridimensional como el que se describió en el capítulo anterior.

No es difícil demostrar que el conjunto de los puntos cuyos radios vectores son perpendiculares al versor básico $\mathbf{e}_2$ es el hiperplano seudoeuclídeo $OXZW$ de base $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_3$, $\mathbf{e}_4$ definido por la ecuación $y = 0$. La ecuación $z = 0$ corresponde en el espacio cuatridimensional de Minkowski al hiperplano seudoeuclídeo $OXYW$, de base $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_4$, perpendicular al eje de coordenadas OZ.

Ahora se comprende por qué la representación convencional del sistema de coordenadas $OXYZW$ en forma de cuatro ejes (fig. 31) es prácticamente inútil para crear la idea intuitiva de espacio cuatridimensional. Esta figura no nos ayuda a ver ningún hiperplano como espacio tridimensional, fuera del cual existen otros espa-

cios tridimensionales. En el mejor de los casos podemos ver cuatro planos, OXY, OYZ, OZW y OXW, y no hiperplanos de coordenadas. Cada uno de los planos indicados es solamente la intersección de dos hiperplanos de coordenadas. Por ejemplo, el hiperplano $w = 0$ $(OXYZ)$ corta al hiper-

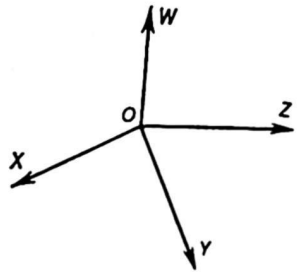


Fig. 31

plano $x = 0$ $(OYZW)$ por el plano OYZ. En efecto, al hiperplano $w = 0$ pertenecen todos los radios vectores que son combinaciones lineales de la forma

$$xe_1 + ye_2 + ze_3 + 0 \cdot e_4 = xe_1 + \\ + ye_2 + ze_3,$$

donde x, y, z son números reales cualesquiera. El hiperplano $x = 0$ es un conjunto de radios vectores que son combinaciones lineales de la forma

$$0 \cdot e_1 + ye_2 + ze_3 + we_4 = \\ = ye_2 + ze_3 + we_4,$$

donde y, z, w son números reales cualesquiera. A ambos hiperplanos sólo pertenecen aquellos radios vectores que son combinaciones lineales de la forma

$$0 \cdot e_1 + ye_2 + ze_3 + 0 \cdot e_4 = \\ = ye_2 + ze_3.$$

Pero el conjunto de esos radios vectores es un plano paralelo a los versores básicos e_2, e_3 que pasa por el punto O, es decir, el plano OYZ.

La fig. 31 muestra un rasgo notable del universo tetradimensional, del cual no tenemos idea en el universo tridimensional. Los planos OYZ y OXY, representados en la fig. 31, se cortan por la línea OY, a lo cual estamos acostumbrados. Pero el plano OYZ corta al plano OXW *en un solo punto* O. Representar de un modo intuitivo este hecho sorprendente, no podemos. Sin embargo, es fácil convencerse de que es justo analíticamente. La diferencia entre estos dos casos de intersección de planos se debe a que los planos OYZ y OXY pertenecen a un mismo espacio tridimensional (hiperplano $OXYZ$), mientras que los planos OYZ y OXW no se hallan en un espacio tridimensional (sino que pertenecen a hiperplanos distintos).

De acuerdo con (5.5), la longitud del radio vector (5.6) es

$$|\mathbf{r}| = \sqrt{\langle \mathbf{r}, \mathbf{r} \rangle} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - w^2}. \quad (5.10)$$

Esta longitud se anula si las coordenadas del radio vector satisfacen la condición

$$x^2 + y^2 + z^2 - w^2 = 0, \text{ o bien}$$
$$x^2 + y^2 + z^2 = w^2. \quad (5.11).$$

La relación (5.11) determina en el espacio seudoeuclídeo cuatridimensional de índice 1 el lugar geométrico de los puntos cuyos radios vectores son isótropos. ¿Qué lugar geométrico de los puntos es éste?

En primer lugar vemos que la ecuación (5.11), por su estructura, se parece a la ecuación (4.7) del cono isótropo en el espacio seudoeuclídeo tridimensional. Tras la semejanza formal de estas ecuaciones se encuentra una profunda afinidad geométrica de los objetos que ellas determinan. Consideremos la intersección del lugar geométrico (5.11) con el hiperplano de coordenadas $OYZW$:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = w^2 \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow y^2 + z^2 = w^2. \quad (5.12)$$

El hiperplano $OYZW$ es un espacio seudoeuclídeo tridimensional, y la ecuación (5.12) representa un cono isótropo de este espacio. De un modo análogo, las intersecciones del lugar geométrico de los puntos (5.11) con los otros dos hiperplanos de coordenadas seudoeuclídeos $OXYW$ y $OXZW$ son conos isótropos de estos hiperplanos:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = w^2 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow x^2 + y^2 = w^2,$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 + w^2 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow x^2 + z^2 = w^2.$$

Pero con el hiperplano euclídeo *propio* de coordenadas $OXYZ$ se interseca con el conjunto de los puntos que satisfacen la ecuación (5.11) en un solo punto:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = w^2 \\ w = 0 \end{cases} \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 =$$

$$= 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0, \\ y = 0, \\ z = 0, \\ w = 0. \end{cases}$$

Este punto es el origen de coordenadas, que sirve de vértice a los tres conos isótropos antes considerados en los hiperplanos seudoeuclídeos de coordenadas.

Es natural considerar el conjunto de puntos que satisfacen la ecuación (5.11) como la generalización de una superficie cónica, en el caso de un gran número de mediciones, y darle el nombre de *hipercono isótropo*. Un hipercono es un conjunto

tridimensional de puntos en un espacio cuatridimensional, análogo a una superficie cónica en un espacio tridimensional.

Continuando la analogía entre un cono isótropo y el hipercono isótropo, llamamos región *interna* del hipercono (5.11) al conjunto de puntos cuyas coordenadas satisfacen la condición

$$x^2 + y^2 + z^2 - w^2 < 0,$$
$$\text{o bien } x^2 + y^2 + z^2 < w^2. \quad (5.13)$$

De acuerdo con (5.10), la longitud del radio vector de cualquier punto de la región interna del hipercono isótropo se expresa por un número imaginario. La falta de claridad en la figuración de la región interna cuatridimensional del hipercono isótropo podemos compensarla parcialmente considerando la intersección de esta región con los hiperplanos de coordenadas seudoeuclídeos:

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2<w^2 \\ x=0 \end{cases} \Rightarrow y^2+z^2<w^2,$$

$$\begin{cases} x^2+x^2+z^2<w^2 \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow x^2+z^2<w^2.$$

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2<w^2 \\ z=0 \end{cases} \Rightarrow x^2+y^2<w^2.$$

Resulta que la región interna del hipercono isótropo se interseca con cada hiperplano seudoeuclídeo, que pasa por el vértice

del hipercono, por la región interna del cono isótropo de este hiperplano.

Aquí será útil una ilustración gráfica reduciendo la dimensión: en vez de un espacio seudoeuclídeo cuatridimensional de índice 1, vamos a considerar un espacio seudoeuclídeo tridimensional de índice 1, y en vez de una hipersuperficie seudoeuclídea, un plano seudoeuclídeo. Como se

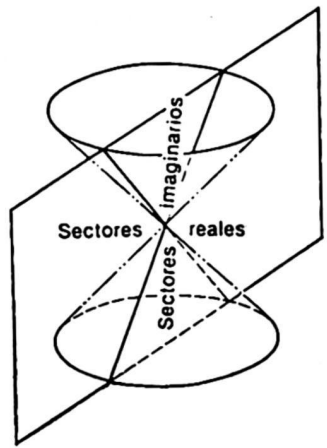


Fig. 32

ve en la fig. 32, la región interna del cono isótropo se corta con el plano por la región interna de los sectores imaginarios del plano. Sin salirse del plano seudoeuclídeo, fuera de los límites de los sectores imaginarios sólo pueden estar los sectores reales. Pero, saliéndonos del plano al espacio tridimensional, hallamos, fuera de los sec-

tores imaginarios del plano, la región interna del cono isótropo (en particular, los sectores imaginarios de otro plano). De un modo análogo, quedándonos en el espacio tridimensional, descubrimos, fuera de los límites de la región interna del cono isótropo, sólo su región externa. Pero si salimos del espacio tridimensional al cuatridimensional, fuera de la región interna del cono isótropo hallamos la región interna del hipercono isótropo (en particular, la región interna del cono isótropo de otro hiperplano).

Una comparación análoga puede hacerse con las regiones externas del hipercono isótropo en el espacio cuatridimensional de Minkowski, del cono isótropo de un espacio tridimensional seudoeuclídeo y de los sectores reales de un plano seudoeuclídeo. La región externa del hipercono isótropo está constituida por los puntos cuyas coordenadas satisfacen la condición

$$x^2 + y^2 + z^2 - w^2 > 0, \text{ o bien}$$
$$x^2 + y^2 + z^2 > w^2. \qquad (5.14)$$

Todos los vectores del espacio seudoeuclídeo cuatridimensional de índice 1, independientemente de sus puntos de aplicación, se pueden dividir en tres clases, atendiendo al criterio de su pertenencia a una de las tres regiones. Diremos que el vector arbitrario

$$\mathbf{a} = \alpha_1 \mathbf{e}_1 + \alpha_2 \mathbf{e}_2 + \alpha_3 \mathbf{e}_3 + \alpha_4 \mathbf{e}_4$$

pertenece a la región interna del hipercono isótropo si sus coordenadas satisfacen la condición

$$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 - \alpha_4^2 < 0,$$

análoga a la condición (5.13) para los radios vectores. La longitud (módulo) de todo vector de la región interna se expresa por medio de un número imaginario (véase (5.5)). Diremos que el vector arbitrario a pertenece a la región externa del hipercono isótropo, si sus coordenadas satisfacen la condición

$$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 - \alpha_4^2 > 0,$$

análoga a la condición (5.14) para los radios vectores. La longitud (módulo) de todo vector de la región externa se expresa con un número real. Finalmente, si las coordenadas del vector a satisfacen la condición

$$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 - \alpha_4^2 = 0,$$

el vector a es isótropo y colinear de cierto radio vector perteneciente al hipercono isótropo (5.11).

Consideremos en el espacio cuatridimensional de Minkowski el conjunto de todos los radios vectores $\mathbf{r} = \overrightarrow{OM}$ perpendiculares a un vector no nulo a. Este conjunto se determina por la ecuación

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{r} \rangle = 0, \qquad (5.15)$$

que en forma de coordenadas, de acuerdo con (5.4), toma la forma

$$\alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 z - \alpha_4 w = 0. \tag{5.16}$$

La ecuación (5.16) es lineal (todas las variables figuran en ella en primer grado), lo mismo que la ecuación del plano (4.11), pero la ecuación (5.16) tiene más variables, con la particularidad de que tres de ellas pueden tomar, independientemente unas de otras, valores cualesquiera. Esto significa que la ecuación (5.16) determina en el espacio cuatridimensional un conjunto tridimensional de puntos análogo a un plano, es decir, un hiperplano en posición general (es decir, que pasa por el origen de coordenadas). El vector a en la ecuación (5.15) se llama *normal al hiperplano*, porque todo radio vector perteneciente a este hiperplano es perpendicular al vector a.

Razonando del mismo modo que en el § 22 (véanse las fórmulas (4.12)—(4.14)), pero ya para cuatro variables, no es difícil demostrar que si la normal a al hiperplano (5.16) pertenece a la región interna del hipercono isótropo, el hiperplano tiene métrica euclídea propia, es decir, es un espacio euclídeo tridimensional propio. También se puede demostrar que un hiperplano cuya normal pertenezca a la región externa del hipercono isótropo tendrá métrica seudoeuclídea, es decir, será un espacio seudoeuclídeo tridimensional del mismo tipo que el estudiado en el capítulo 4. Finalmente, un hiperplano perpendicular a un vector isótropo, contiene a este vector y posee propiedades métricas específicas, distintas de las euclídeas propias y de las seudoeuclídeas. Este hiperplano se dice que es *isótropo*. En él hay vectores de longitud real, pero no los hay de longitud imaginaria, y sólo existe una dirección isótropa. Eso significa que el hiperplano isótropo no penetra en la región interna del hipercono isótropo y sólo tiene con él una recta común, es decir, es un hiperplano tangente al hipercono isótropo.

§ 26. Espacio sensorialmente perceptible

Basándose en el espacio cuatridimensional seudoeuclídeo de índice 1, se puede construir un modelo de universo que concuerda totalmente con la teoría especial de la relatividad e incluso da explicación a dicha teoría y a los postulados de Einstein, sin contradecir en nada la visión del universo que nos dan las percepciones sensoriales.

A lo largo de los capítulos precedentes hemos ido formándonos una idea de las relaciones métricas seudoeuclídeas. Y aunque éstas no sean directamente asequibles a la percepción visual, por medio de fórmulas matemáticas y de construcciones gráficas convencionales se consigue crear imágenes suficientemente inteligibles de

las líneas de universo en los espacios seudoeuclídeos bi y tridimensionales. A esto contribuye el hecho de que las propiedades lineales de los espacios seudoeuclídeo y euclídeo propio de igual dimensión, coinciden.

Pero el paso al modelo tetradimensional de universo de Minkowski plantea dificultades, nuevas en principio, en la formación de las representaciones geométricas figuradas, ya que ahora se trata de revisar una propiedad geométrica más profunda, la propiedad *lineal* de la dimensión del espacio. Nuestros ojos jamás han visto objetos cuatridimensionales y figurarnos un espacio euclídeo propio cuatridimensional no es más fácil que imaginarnos un espacio cuatridimensional con métrica seudoeuclídea. Al contrario, es incluso más difícil, porque el espacio cuatridimensional seudoeuclídeo de índice 1, como modelo matemático adecuado al espacio universal real, tiene ligazón explicable con el espacio perceptible sensorialmente, mientras que entre el espacio cuatridimensional euclídeo propio y el mundo físico no vemos relación alguna. Por esta razón no vamos a recurrir en absoluto al espacio cuatridimensional con métrica euclídea propia.

En el universo tetradimensional de Minkowski vamos a encontrarnos con dos tipos de objetos físicos: las líneas de universo y las isótropas, por las cuales se transmiten las acciones electromagnéticas. La

variedad, tanto de unas como de otras, es más rica que en las secciones bi y tridimensionales del universo de Minkowski. Una línea de universo en el espacio cuatridimensional debe satisfacer la condición de que todo vector tangente a ella en cualquiera de sus puntos pertenece a la región interna del hipercono isótropo. El frente de manifestación en el universo tetradimensional de Minkowski puede ser una hipersuperficie tal, que la normal a ella en cualquiera de sus puntos pertenezca también a la región interna del hipercono isótropo.

El hipercono isótropo desempeña un papel decisivo en la formación de la imagen que se percibe visualmente del mundo que nos rodea, ya que las acciones electromagnéticas procedentes de otros puntos de universo son transmitidas a cada observador por las rectas isótropas, y todas las rectas isótropas que pasan por el punto de universo del observador forman un hipercono isótropo. El observador percibe el universo desde la posición del sistema de coordenadas a que está ligado. Esto quiere decir que el eje OW del sistema ortonormalizado de coordenadas $OXYZW$ está dirigido según la línea de universo del observador (o según la tangente a la curva de universo) en el sentido de su crecimiento. Si como origen de coordenadas O se toma el punto de universo que representa el estado del observador en su instante actual, el hipercono isótropo, por cuya generatriz ve el universo

el observador, vendrá descrito por la ecuación (5.11):

$$x^2 + y^2 + z^2 = w^2.$$

Como sólo se pueden observar los puntos de universo pasados (véase el final del § 18), nos interesa la parte del hipercono isótropo en que la coordenada $w = ct$ es negativa:

$$w = -\sqrt{x^2+y^2+z^2}. \qquad (5.17)$$

A esta parte del hipercono isótropo la llamaremos hueco posterior (o pasado), para diferenciarla del hueco anterior (o futuro), hacia dentro del cual tiende el crecimiento de la línea de universo del observador.

Cuando, por la marcha del proceso de manifestación, el observador se traslada a lo largo de su recta de universo OW del punto O, origen de coordenadas, al punto $Q\,(0;\,0;\,0;\,w_0)$, podrá ver, en el espacio cuatridimensional que lo rodea, sólo aquellos puntos $M\,(x;\,y;\,z;\,w)$ cuya distancia al punto Q sea nula:

$$|\overline{QM}| = \sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2+(z-0)^2-(w-w_0)^2} = 0.$$

Para estos puntos se cumple la condición

$$(w - w_0)^2 = x^2 + y^2 + z^2.$$

Y si se tiene en cuenta que los puntos M observables pertenecen al pasado absoluto

respecto del punto Q, es decir, que $w - w_0 < 0$, llegamos a la relación

$$w - w_0 = -\sqrt{x^2+y^2+z^2},$$

o bien

$$w = w_0 - \sqrt{x^2+y^2+z^2}. \qquad (5.18)$$

Ésta es la ecuación del hueco posterior del hipercono isótropo que parte del punto Q como vértice. Da la impresión de que el vértice del hipercono isótropo se desplaza junto con el punto de universo del observador durante la marcha del proceso de manifestación. Pero en realidad, cada punto del espacio cuatridimensional de Minkowski es vértice de un hipercono isótropo, y, donde quiera que se encuentre el observador, estará en el cruce de todas las generatrices isótropas de un hipercono.

Para que se comprenda cómo se figuraría el mundo circundante un observador ligado a la línea de universo OW, vamos a considerar un objeto de observación cuya construcción sea la más simple desde el punto de vista de su descripción matemática. Supongamos que el eje OW está rodeado por todos sus lados de una «cerca» formada por rectas de universo paralelas a él, y que estas rectas se encuentran a iguales distancias del eje OW. En el lenguaje de las imágenes geométricas tridimensionales, a que estamos acostumbradas, diríamos que esta construcción es un cilindro circular

recto. Veamos lo que dicen las fórmulas matemáticas de este objeto en el espacio cuatridimensional.

En el § 5 se dedujo la ecuación paramétrico-vectorial de la recta (1.26) en el espacio perceptible sensorialmente. Los razonamientos empleados allí pueden repetirse para un espacio lineal vectorial-puntual de cualquier dimensión. Las propiedades métricas del espacio no desempeñan aquí papel alguno, por cuanto en la ecuación de la recta sólo se utilizan operaciones *lineales* con vectores. Escrita en forma vectorial, la ecuación de la recta en el espacio cuatridimensional de Minkowski no difiere de la ecuación (1.26). La diferencia de dimensiones de los espacios se pone de manifiesto únicamente cuando la ecuación de la recta se escribe en forma de coordenadas. Supongamos que la recta que nos interesa pasa por el punto M_1, indicado por el radio vector

$$\mathbf{r}_1 = \overline{OM}_1 = x_1\mathbf{e}_1 + y_1\mathbf{e}_2 + z_1\mathbf{e}_3 + w_1\mathbf{e}_4.$$

De vector director de la recta, paralelo al eje OW, sirve el versor básico $\mathbf{e}_4$. Designando a través de

$$\mathbf{r} = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 + z\mathbf{e}_3 + w\mathbf{e}_4$$

al radio vector de un punto arbitrario de la recta, escribimos la ecuación de la recta

en la forma

$$\mathbf{r} - \mathbf{r}_1 = \lambda\mathbf{e}_4, \text{ o bien}$$
$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + \lambda\mathbf{e}_4. \qquad (5.19)$$

Aquí λ es un parámetro que puede tomar cualesquiera valores reales desde $-\infty$ hasta $+\infty$. Sustituyendo en la ecuación (5.19) los vectores por sus columnas de coordenadas (véanse (1.21)—(1.24))

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \\ w_1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

obtenemos las ecuaciones paramétricas de la recta

$$x = x_1, y = y_1, z = z_1, w = w_1 + \lambda. \qquad (5.20)$$

La distancia de la recta (5.20) al eje OW se mide por la perpendicular a ambas rectas. El hiperplano $w = w_1$, perpendicular al eje OW, contiene todas las perpendiculares a éste (véase (5.8)). En este hiperplano se encuentra el punto M_1 $(x_1;\ y_1;\ z_1;\ w_1)$, puesto que sus coordenadas satisfacen la ecuación del hiperplano. Con el eje OW se corta el hiperplano $w = w_1$ en el punto P_1 $(0;\ 0;\ 0;\ w_1)$. Escribimos la descomposición del vector $\overline{P_1M_1}$ según la base del

espacio cuatridimensional de Minkowski:

$$\overrightarrow{P_1M_1} = (x_1 - 0)\,\mathbf{e}_1 + (y_1 - 0)\,\mathbf{e}_2 + (z_1 - 0)\,\mathbf{e}_3 + (w_1 - w_1)\,\mathbf{e}_4 = x_1\mathbf{e}_1 + y_1\mathbf{e}_2 + z_1\mathbf{e}_3 + 0\cdot\mathbf{e}_4.$$

De acuerdo con (5.5) la longitud del vector $\overrightarrow{P_1M_1}$ es

$$|\overrightarrow{P_1M_1}| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} = \rho.$$

Esta es la distancia de la recta (5.20) al eje OW. La notaremos con ρ, porque a esa misma distancia queremos situar alrededor del eje OW todas las rectas posibles paralelas a él, formando una «cerca» continua. Las condiciones analíticas que satisfacen todos los puntos de la «cerca», y sólo sus puntos, se formulan del modo siguiente:

$$\begin{cases} -\infty < w < \infty, \\ \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \rho. \end{cases} \qquad (5.21)$$

Aquí también se expresa el hecho de que, en cada recta paralela al eje OW, la coordenada w puede tomar valores cualesquiera, y de que la distancia del punto M $(x;\ y;\ z;\ w)$ al eje OW (medida por la perpendicular a éste) debe ser igual a ρ.

El lugar geométrico de los puntos que satisfacen las condiciones (5.21) tiene una forma que, por la experiencia de las percepciones sensoriales, no conocemos. Para dar una idea intuitiva de ella, aunque sólo

sea parcial, utilizaremos el método de las secciones. La intersección del hiperplano coordenado $OXYW$ $(z = 0)$ con el conjunto de puntos (5.21) se describe por el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} -\infty < w < \infty \\ \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \rho \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\infty < w < \infty, \\ \sqrt{x^2 + y^2} = \rho. \end{cases} \qquad (5.22)$$

Dándole a la coordenada w valores fijos cualesquiera, por ejemplo, w_1, determinamos, en el espacio tridimensional seudoeuclídeo del hiperplano $OXYW$, el plano $w = w_1$ perpendicular al eje OW y con métrica euclídea propia. Este plano es paralelo al OXY. La intersección del plano $w = w_1$ con el conjunto de puntos (5.22) es una circunferencia ordinaria de radio ρ con centro en el eje OW. Circunferencias iguales a esta se obtienen en todos los otros planos paralelos al OXY. Por lo tanto, el conjunto de puntos (5.22) es un cilindro circular. Este cilindro se diferencia del circular recto, a que estamos acostumbrados, solamente en que la distancia, medida a lo largo del eje y de las generatrices, se expresa con un número imaginario y los planos de las circunferencias son perpendiculares al eje del cilindro en sentido seudoeuclídeo.

El hiperplano coordenado $OYZW$ $(x = 0)$ se interseca con el conjunto de puntos (5.21)

por la superficie cilíndrica

$$\begin{cases} -\infty < w < \infty \\ \sqrt{x^2+y^2+z^2} = \rho \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\infty < w < \infty, \\ \sqrt{y^2+z^2} = \rho. \end{cases} \tag{5.23}$$

En el espacio de este hiperplano con la ecuación $w = w_1$ se determina un plano, también perpendicular al eje OW, pero paralelo no al OXY, sino al OYZ (el plano OXY no pertenece al espacio $OYZW$).

Por fin, el hiperplano coordenado $OZXW$ se interseca con el conjunto de puntos (5.21) por la superficie cilíndrica

$$\begin{cases} -\infty < w < \infty \\ \sqrt{x^2+y^2+z^2} = \rho \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\infty < w < \infty, \\ \sqrt{x^2+z^2} = \rho, \end{cases} \tag{5.24}$$

en la cual los planos perpendiculares al eje OW son paralelos al plano OXZ.

Los cilindros circulares (5.22), (5.23) y (5.24) tienen un eje común, la recta OW, pero los planos de las circunferencias perpendiculares al eje tienen en ellos distintas orientaciones. En particular, si estos planos se hacen pasar por el origen de coordenadas, coinciden respectivamente con los planos OXY, OYZ y OZX. Están en distintos hiperplanos seudoeuclídeos, pero en el mismo hiperplano euclídeo propio $OXYZ$, el cual es en su totalidad perpendicular al

eje OW (véase (5.7)). Veamos la intersección del hiperplano $OXYZ$ con el conjunto de puntos (5.21):

$$\begin{cases} -\infty < w < \infty \\ \sqrt{x^2+y^2+z^2} = \rho \\ w = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} w = 0 \\ \sqrt{x^2+y^2+z^2} = \rho. \end{cases} \tag{5.25}$$

Las condiciones (5.25) determinan, en el espacio tridimensional euclídeo propio del hiperplano $w = 0$, una superficie esférica de radio ρ con centro en el origen de coordenadas O. Esta superficie esférica contiene todas las circunferencias que son cortes de los cilindros (5.22), (5.23) y (5.24) por los planos perpendiculares al eje OW que pasan por el origen de coordenadas. En general, *cada* circunferencia perteneciente a la esfera (5.25) es una sección perpendicular al eje OW situada en un hiperplano seudoeuclídeo determinado. El lugar geométrico de los puntos que satisfacen las condiciones (5.21) contiene todos estos cilindros y, por consiguiente, es una generalización de la superficie cilíndrica para el caso de un gran número de dimensiones. Por eso el conjunto de puntos (5.21) se llama *hipercilindro*. Si representáramos un espacio cuatridimensional de Minkowski formado por hiperplanos $w = w_1$ «ensartados» en el eje OW perpendicular a ellos (véase el § 24), cada uno de estos hiperpla-

nos cortaría al hipercilindro (5.21) por la esfera

$$\begin{cases} -\infty < w < \infty \\ \sqrt{x^2+y^2+z^2} = \rho \\ w = w_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} w = w_1, \\ \sqrt{x^2+y^2+z^2} = \rho, \end{cases} \tag{5.26}$$

cuyo radio es igual a ρ y cuyo centro se encuentra en el punto P_1 (0; 0; 0; w_1), que es el punto de intersección del hiperplano $w = w_1$ con el eje OW.

La semejanza formal de la esfera con la circunferencia y del hipercilindro con el cilindro provoca el deseo de aprovechar la conocida imagen de la esfera para formar la idea del hipercilindro. Pero ya desde los primeros pasos nos damos cuenta de que no conocemos bien la esfera, o mejor dicho, de que no podemos figurárnosla en el espacio cuatridimensional. En este sentido nos es más comprensible la circunferencia. Vemos que todos los puntos de una circunferencia se encuentran en un espacio bidimensional, pero junto al plano de la circunferencia vemos otros planos. No nos sorprende que a través de la región del plano limitada por la circunferencia se puedan trazar diversas rectas que no corten a ésta (por ejemplo, perpendiculares al plano). Por analogía puede expresarse que a través de la región del espacio tridimensional, comprendido dentro de la esfera, pasan rectas que no cortan su superficie. Pero

eso ya no podemos imaginárnoslo, aunque no sea nada difícil indicar estas rectas por el procedimiento analítico.

Empezaremos por el eje de coordenadas OW. Éste pasa por el centro de la esfer (5.25) (origen de coordenadas), pero no tiene ni un solo punto común con su superficie ya que todos los puntos del eje OW tienen las coordenadas x, y, z iguales a cero y no satisfacen la ecuación $\sqrt{x^2+y^2+z^2} = \rho$ de la superficie esférica. También se puede razonar de esta otra forma: todos los puntos de la esfera (5.25) pertenecen al hiperplano $w = 0$, mientras que el eje OW interseca este hiperplano únicamente en el punto O (0; 0; 0; 0), que no se encuentra en la superficie de la esfera. Toda la región interna de la esfera (5.25) se determina, en el hiperplano $w = 0$, por la condición

$$\sqrt{x^2+y^2+z^2} < \rho. \tag{5.27}$$

Una recta que pase por cualquier punto S (x_S; y_S; z_S; 0) de esta región en la dirección del versor básico $\mathbf{e}_4$ (véanse (5.19) y (5.20)), cortará al hiperplano $w = 0$ *sólo* en el mismo punto S. Pero por la condición impuesta, el punto S pertenece a la región interna (5.27) de la esfera (5.25), es decir, no puede encontrarse en su superficie. Se pueden tomar rectas que pasen por puntos internos de la esfera (5.25) en otras direcciones, diferentes de OW. Éstas pueden ser rectas pertenecientes tanto a la

región interna del hipercono isótropo, como a la región externa. Con tal que la recta con todos sus puntos no pertenezca al espacio tridimensional del hiperplano $w = 0$, ésta pasará por la región interna de la esfera (5.25) sin cortar la superficie de la misma. En el universo de Minkowski hay muchas más rectas de este tipo que rectas que pertenezcan al hiperplano $w = 0$. Pero nosotros sólo estamos en condiciones de figurarnos las últimas, por lo que estamos convencidos de que toda recta que penetre dentro de una esfera debe cruzar la superficie de ésta.

El eje OW pasa no sólo por el centro de la esfera (5.25), sino también por el de la esfera (5.26), que se encuentra en el hiperplano $w = w_1$. Este eje no corta la superficie de esas esferas, ni la de ninguna de las esferas que representan secciones del hiperplano (5.21) por hiperplanos perpendiculares al eje OW. Esto es comparable a lo que ocurre con el eje de un cilindro circular, el cual no corta las circunferencias que se encuentran en planos perpendiculares al eje del cilindro. Hay que acostumbrarse a imaginar la superficie esférica como una hipercircunferencia (es decir, como una circunferencia bidimensional) y, luego, podremos hablar ya del hipercilindro como de un conjunto de hipercircunferencias (esferas) «ensartadas» en el eje perpendicular a ellas. *Estas esferas no se cortan entre sí, por no cortarse los hiperplanos paralelos que las contienen.*

Hasta ahora hemos utilizado mucho la representación convencional de las relaciones *métricas* en el espacio. Ahora vamos a recurrir a la representación convencional de la propiedad *lineal* de la dimensión. En

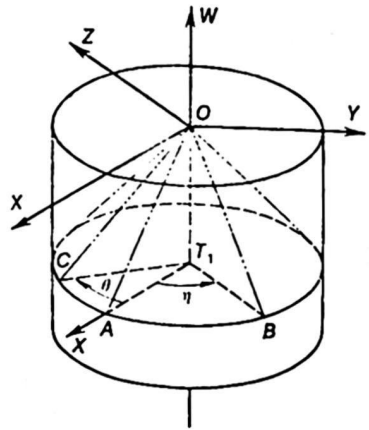


Fig. 33

la fig. 33 el hiperplano de coordenadas $OXYZ$ ($w = 0$) se representa en forma de plano. Este procedimiento ayuda, si no a figurarnos claramente, sí a subrayar el hecho de que en el universo tetradimensional, a la vez que el espacio tridimensional $OXYZ$, existen los espacios tridimensionales, paralelos a él, de los hiperplanos perpendiculares al eje OW. Verdad es que la posibilidad de «mirar desde fuera» el hiperplano hemos de pagarla con el «encu-

brimiento» de una de sus dimensiones. Por cierto, la cuestión puede plantearse como si en la fig. 33 viniese representado no el espacio cuatridimensional de Minkowski, sino su sección tridimensional por uno de os hiperplanos seudoeuclídeos coordenados. Si éste es el hiperplano $OXYW$, a la ecuación $w = 0$ corresponderá el plano OXY, y el eje OZ deberá omitirse mentalmente como no perteneciente a este plano. En el hiperplano $OYZW$, a la ecuación $w = 0$ corresponderá el plano OYZ y se omitirá el eje OX, y en el hiperplano $OZXW$ estará contenido el plano OZX y se omitirá el eje OY. De este modo, en la fig. 33 puede verse la síntesis de tres hiperplanos seudoeuclídeos tridimensionales, y, para reorzar el efecto intuitivo, cada uno de ellos se puede considerar por separado. Con l cono isótropo representado en la fig. 33 puede ligarse mentalmente tanto cada uno de los conos isótropos de los espacios trimensionales $OXYW$, $OYZW$ y $OZXW$, como el hipercono isótropo del espacio cuatridimensional. Con el cilindro representado en la fig. 33 se puede ligar mentalmente el hipercilindro (5.21) o cada uno de los cilindros (5.22), (5.23) y (5.24). Las intersecciones de estos cilindros con los planos coordenados perpendiculares al eje OW son circunferencias de las cuales sintetizamos la imagen de la hipercircunferencia (esfera) que representa la intersección del hipercilindro con el hiperplano $w = 0$.

Desde el punto de universo O (origen de coordenadas), el observador sólo puede ver los puntos del hipercilindro (5.21) en los cuales éste se interseca con el hueco posterior del hipercono isótropo (5.17) que parte del punto O como vértice:

$$\begin{cases} -\infty < w < \infty \\ \sqrt{x^2+y^2+z^2} = \rho \\ w = -\sqrt{x^2+y^2+z^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2+y^2+z^2} = \rho, \\ w = -\rho. \end{cases} \tag{5.28}$$

El conjunto de puntos (5.28) es una esfera de radio ρ, que se encuentra en el hiperplano euclídeo propio $w = -\rho$. El centro de la esfera es el punto T_1 $(0; 0; 0; -\rho)$, en el cual el hiperplano $w = -\rho$ corta al eje OW. Cuando, por la marcha del proceso de manifestación, el observador es transportado, a lo largo de la recta OW, al punto Q $(0; 0; 0; w_0)$, puede ver únicamente la intersección del hipercilindro (5.21) con el hueco posterior del hipercono isótropo (5.18), que tiene su vértice en el punto Q:

$$\begin{cases} -\infty < w < \infty \\ \sqrt{x^2+y^2+z^2} = \rho \\ w = w_0 - \sqrt{x^2+y^2+z^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2+y^2+z^2} = \rho, \\ w = w_0 - \rho. \end{cases} \tag{5.29}$$

El conjunto de puntos (5.29) forma una esfera de radio ρ, situada en el hiperplano

euclídeo propio $w = w_0 - \rho$ y cuyo centro se encuentra en el punto T_2 (0; 0; 0; $w_0 - \rho$) del eje OW. El observador sólo puede percibir en cada instante aquellos puntos del hipercilindro (5.21) que se hallan en la superficie esférica, que representa la intersección del hipercilindro con el hueco posterior del hipercono isótropo, cuyo vértice se encuentra en el punto de universo del observador.

¿Se puede concluir de esto que el observador ve en cada instante una esfera *alrededor suyo*? La duda se debe a que el observador se encuentra no en el centro de la esfera, sino en un hiperplano completamente distinto. Por ejemplo, desde el punto de origen de coordenadas O él ve los puntos de la esfera (5.28) cuyo centro se encuentra en el punto de universo *pasado* T_1 (0; 0; 0; $-\rho$). Como nuestra conciencia está acostumbrada a las formas tridimensionales, ella se subleva contra la identificación del centro T_1 de la esfera con el punto O, que se encuentra fuera de la esfera. Sin embargo, para nosotros es comprensible la posición del observador, que construye su visión del universo sobre la base de las percepciones sensoriales. No teniendo posibilidad de ver las líneas de universo en su extensión (véanse las págs. 219—222), el observador no percibe la diferencia de los valores de la coordenada w como diferencia de posición espacial. Pero el punto O difiere del T_1 sólo por el

valor de la coordenada w, siendo iguales para los dos los valores de las tres primeras coordenadas. Por eso, al observador en reposo, le parece que el lugar que él ocupa en el espacio en el instante actual no se diferencia en nada del lugar que ocupaba

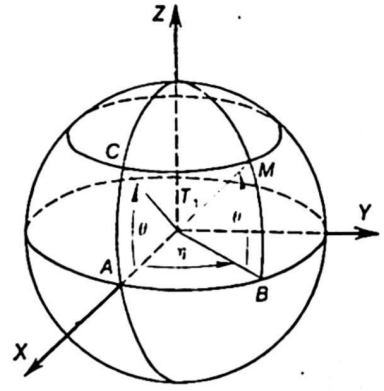


Fig. 34

en el pasado. Hay que estudiar detenidamente este mecanismo de cambio de centro de la superficie esférica.

Desde el centro T_1 de la esfera (5.28) hacia todos los puntos posibles M de su superficie se dirigen radios, cuya orientación en el espacio tridimensional euclídeo propio del hiperplano $w = -\rho$ se caracteriza por los valores de los ángulos η y θ (fig. 34). Pero el observador ve los puntos de la esfera (5.28) no desde el centro T_1, sino desde el punto de universo O (véase la fig. 33) por la generatriz del hipercono

isótropo, y para él las diferencias de las posiciones visibles de los puntos se deben a las diferencias de las respectivas direcciones isótropas. Por lo tanto, hay que comprender de qué modo la orientación de una isótropa con relación a las otras isótropas adquiere una expresión numérica determinada y por qué coincide ésta con a expresión de la orientación del radio que parte del centro de la esfera.

Para empezar simplificaremos el problema limitándonos a una sección seudoeuclídea tridimensional del universo de Minkowski. Vamos a mirar la fig. 33 como imagen del espacio tridimensional del hiperplano coordenado $OXYW$, prescindiendo mentalmente del eje OZ ($z = 0$). Este hiperplano se interseca con la esfera (5.28) por la circunferencia

$$\begin{cases} w = -\rho \\ \sqrt{x^2+y^2+z^2} = \rho \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} w = -\rho, \\ \sqrt{x^2+y^2} = \rho. \end{cases} \quad (5.30)$$

Supongamos que el punto A de la circunferencia (5.30) se encuentra en el radio T_1A, paralelo al eje OX, y el punto B está situado en la circunferencia de modo que el radio T_1B forma con el T_1A el ángulo $\widehat{AT_1B} = \eta$. El observador ve los puntos A y B por las isótropas OA y OB (véase la fig. 33). ¿Puede hablarse de magnitud del ángulo entre las isótropas? El plano AOB

que ellas determinan tiene métrica seudoeuclídea y en él no hay más direcciones isótropas que las OA y OB (o paralelas a ellas). El ángulo entre isótropas no colineares en un plano seudoeuclídeo se expresa por una magnitud imaginaria infinita (véase la fig. 14), es decir, es indeterminado. Y, además, el observador no puede medir este ángulo, porque las isótropas, que sirven de vías de transmisión de las señales luminosas, no pueden ser percibidas por los sentidos. No obstante, en el sistema de coordenadas ligado al eje OW tiene una magnitud determinada el ángulo diedro $\widehat{A\,(OW)\,B}$ entre los planos AOW y BOW (véase la fig. 33). La medida de un ángulo diedro es el ángulo lineal entre las perpendiculares a su arista levantadas en ambos planos (caras) desde un mismo punto. La circunferencia (5.30) se encuentra en el plano $w = -\rho$, el cual es *perpendicular* al eje OW y tiene métrica euclídea propia. De aquí se sigue, primero, que el ángulo $\widehat{AT_1B} = \eta$ es la medida del ángulo diedro $\widehat{A\,(OW)\,B}$ y, segundo, que este ángulo se expresa por medio de un número real perteneciente al intervalo $[0;\ 2\pi]$. Al ver los puntos de universo A y B por las isótropas OA y OB, el observador tiene que valorar la diferencia entre estas direcciones, *en su sistema de coordenadas*, por el ángulo

$\widehat{AT_1B}$, porque la imagen perceptible sensorialmente del espacio seudoeuclídeo tridimensional, exenta de extensión espacial en la dirección del eje OW, resulta como proyectada sobre un plano perpendicular a OW. Si se tomara otro eje OW, la diferencia de las direcciones isótropas OA y OB se caracterizaría por otro ángulo diedro.

Pasemos a otra forma de interpretar la fig. 33. Convengamos ver en ella la imagen del espacio seudoeuclídeo tridimensional del hiperplano coordenado $OZXW$, omitiendo mentalmente el eje OY ($y = 0$). Este hiperplano corta la esfera (5.28) por la circunferencia

$$\begin{cases} w = -\rho \\ \sqrt{x^2+y^2+z^2} = \rho \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} w = -\rho, \\ \sqrt{x^2+z^2} = \rho. \end{cases} \quad (5.31)$$

El punto A (x_A; 0; 0; $-\rho$) pertenece a la circunferencia (5.31), puesto que las coordenadas de este punto satisfacen la ecuación de la circunferencia. Tomamos en la circunferencia (5.31) el punto de universo C y designamos por θ el ángulo entre los radios T_1A y T_1C. En la fig. 34 la esfera (5.28) se ha representado en el espacio tridimensional y en ella se puede ver que los planos de las circunferencias (5.30) y (5.31) son perpendiculares entre sí. En la fig. 33, en cambio, representamos convencionalmente todo el espacio tridimensional del

hiperplano $w = -\rho$ en forma de plano, lo que nos impidió mostrar claramente la mutua perpendicularidad de los planos AT_1B y AT_1C. Por eso recurrimos al procedimiento de la consideración por separado de los hiperplanos $OXYW$ y $OZXW$. Así, pues, en el espacio tridimensional del hiperplano $OZXW$ la diferencia entre las direcciones isótropas OA y OC se caracteriza por la magnitud del ángulo diedro $\widehat{A\,(OW)\,C}$, de medida del cual sirve el ángulo lineal $\widehat{AT_1C} = \theta$.

Las circunferencias (5.30) y (5.31), pertenecientes a la esfera (5.28), pueden servir de base a un sistema de coordenadas que permita indicar cualquier punto M de la superficie de la esfera por medio de dos coordenadas angulares, η y θ (véase la fig. 34). En la fig. 33 el punto M no se muestra porque la convencionalidad del dibujo hace que la posición de este punto sea indeterminada. Al considerar la fig. 33 como la imagen del espacio tridimensional del hiperplano $OXYW$, el punto M (η; θ) tendría que hacerse coincidir con el B (η; 0), puesto que los valores de la coordenada η de dichos puntos, medidos en el plano OXY, coinciden. Pero si en la fig. 33 vemos la representación del hiperplano $OZXW$, el punto M se debe hacer coincidir con el punto C. Cada una de estas variantes se puede aceptar en el caso en que la fig. 33

se considera como la representación convencional del universo tetradimensional de Minkowski.

La correspondencia biunívoca entre las generatrices del hipercono isótropo y los pares ordenados $(\eta; \theta)$ de valores de los ángulos, que caracterizan a estas direcciones en el sistema de coordenadas $OXYZW$, permite aclarar considerablemente la idea acerca de la esfera. Todas las direcciones posibles que partiendo del punto de universo T_1 *pertenecen al hiperplano* $w = -\rho$, se reducen a los radios T_1M de los puntos de la esfera (5.28). Para distinguir todas estas direcciones basta dar a las coordenadas angulares η y θ, con independencia una de otra, valores reales cualesquiera desde 0 hasta 2π. Saliéndonos de los límites de este intervalo, no obtendremos nuevos puntos en la esfera, sino que volveremos a los que ya quedan determinados con las condiciones $0 \leqslant \eta < 2\pi$, $0 \leqslant \theta < 2\pi$. En el espacio cuatridimensional del punto T_1 parte, además de éstas, una infinidad de otras direcciones, no pertenecientes al hiperplano $w = -\rho$, pero éstas no van a parar a puntos de la superficie de la esfera (5.28), porque esta esfera no existe fuera del hiperplano $w = -\rho$. Cada generatriz del hueco posterior del hipercono isótropo (5.17), partiendo del punto de universo O como vértice del hipercono, pasa por uno de los puntos de la superficie de la esfera (5.28). Para el observador que se encuentra

en el vértice del hipercono isótropo, el universo perceptible sensorialmente sólo consta de los puntos de esta esfera. Alrededor suyo no ve otras direcciones y no puede con evidencia figurárselas. Por eso le parece al observador que él está rodeado *por todas partes posibles* por la esfera, y la esfera se le figura como una superficie cerrada de la cual no es posible salir sin atravesarla. Las magnitudes de los ángulos diedros que caracterizan todas las posibles direcciones isótropas del hipercono (5.17), le parecen al observador características angulares de todas las direcciones posibles en el universo que lo rodea.

Con el siguiente experimento mental vamos a intentar esclarecer aún más las relaciones descritas. Supongamos que la «cerca» hipercilíndrica (5.21) está formada en realidad por objetos materiales (líneas de universo). En este caso al observador ligado a la recta de universo OW le parecerá que él se encuentra aislado, por una envoltura esférica, del mundo que lo rodea. Admitamos que el eje OW es la línea de universo común de dos observadores hasta el mismo instante a que corresponde el origen de coordenadas O. Después uno de los observadores (que llamaremos primero) hace un intento de salir de los límites del hipercilindro (5.21), lo cual les parece a los dos observadores un intento de escapar de los límites de la esfera que los rodea. El segundo observador permanece en su sitio

(su línea de universo sigue coincidiendo con el eje *OW*) y observa lo que ocurre con su compañero. Cuando ve que éste se mueve hacia la envoltura esférica, esto significa en realidad que la línea de universo del primer observador se ha desviado del eje *OW*, es decir, ha dejado de ser paralela a él. Esta línea de universo chocará inevitablemente con una de las rectas generatrices del hipercilindro (5.21). Si esta generatriz está ligada con suficiente solidez a las rectas de universo contiguas de la «cerca», no experimentará una deformación apreciable y después del choque seguirá siendo paralela al eje *OW*, y la línea de universo del primer observador se reflejará dentro del cilindro (o se juntará con la generatriz de la «cerca»). Para los observadores eso significaría la imposibilidad de romper la envoltura material esférica que los rodea. Pero si, como resultado del choque, una de las rectas de universo de la «cerca» se desvía de la dirección paralela al eje *OW*, la línea de universo del primer observador puede salir de los límites del hipercilindro (5.21) y esto será interpretado por ambos observadores como el rompimiento de la envoltura esférica.

Después de la ruptura, en el hipercilindro (5.21) faltará una de las rectas de universo generatrices. La intersección de la «cerca rota» con el hipercono isótropo, cuyo vértice se encuentra en el punto de universo del segundo observador en el eje *OW*, será una

esfera en la cual hay un punto vacío, es decir, un punto material desocupado. El segundo observador verá aquí un orificio en la envoltura esférica, a través del cual salió el primer observador. Supongamos ahora que este primer observador empieza a examinar por fuera el recién abandonado lugar de reclusión. Cogiéndose por fuera a las rectas de universo que forman el hipercilindro (5.21), las va inspeccionando una tras otra y marcándolas, por ejemplo, con pintura. El bote de pintura que lleva el observador también es una línea de universo en el universo tetradimensional de Minkowski. Al tomar una gota de pintura, el observador-viajero separa de esta línea de universo un hilo más fino que desde ese instante se funde con la recta de universo generatriz del hipercilindro (5.21) que el viajero marca. Si después él vuelve a encontrarse con esta recta, verá que ya está marcada y la interpretará como un punto material pintado. Admitamos que la «cerca» hipercilíndrica es algo transparente. En este caso el segundo observador, que está dentro, verá como el primero se desplaza por fuera. Cuando el primer observador termine de inspeccionar todas las generatrices del hipercilindro (5.21), el segundo confirmará esto e informará de que el viajero ha estado en cada punto de la esfera que rodea al observador. El viajero también ha podido convencerse de eso al no encontrar por fuera ni un solo punto

material sin pintar. Y ambos observadores siguen pensando que en el universo no hay más direcciones que las que van del observador a los puntos de la esfera circundante y que la envoltura esférica material investigada está rodeada *por todas partes* de un espacio vacío, es decir, «pende» en el vacío. Nosotros comprendemos, sin embargo, que, en realidad, la línea de universo del primer observador sólo ha dado una vuelta alrededor de la «cerca» hipercilíndrica (5.21), construida con los «postes» de las generatrices rectilíneas puestas de manifiesto. ¿Quizá por eso los hombres que vuelan en naves cósmicas alrededor de la esfera terrestre consideran ésta como una gran gota de materia flotando en el vacío y no notan que sólo tejen cierto arabesco con sus líneas de universo alrededor del hipercilindro que, en escala cósmica, representa la línea de universo del planeta Tierra en el espacio seudoeuclídeo cuatridimensional?

Hemos considerado adrede una construcción simétrica simple —el hipercilindro (5.21) que rodea a la recta de universo del observador—, para que fuera más fácil comprender, valiéndose de las fórmulas, el cuadro perceptible visualmente del mundo que nos rodea. Ahora podemos ya renunciar a las limitaciones convencionales. Supongamos que las rectas de universo, paralelas a la recta de universo *OW* del observador, no se encuentran a iguales distancias ρ de ella, sino a distancias distintas

en diferentes direcciones. Entonces los puntos de intersección de las rectas con el hipercono isótropo, con vértice en el punto de universo del observador, pertenecerán a superficies esféricas de radios distintos, situadas en hiperplanos diferentes. Pero las direcciones de las generatrices del hipercono isótropo, a pesar de todo, se caracterizarán en el sistema de coordenadas *OXYZW* por las magnitudes η y θ de los ángulos diedros y el observador seguirá considerándose centro de cada esfera, de modo que todo el mundo circundante le parecerá proyectado sobre una superficie esférica. La condición de paralelismo de las otras líneas de universo con el eje *OW* tampoco es obligatoria. Las líneas de universo, rectas o curvas, que no se encuentren en el mismo plano que el eje *OW* serán vistas por el observador en forma de puntos, que se trasladan con el tiempo sobre el fondo de la esfera que lo rodea.

Los puntos de universo que se proyectan en un mismo punto de la esfera visible se encuentran en una misma isótropa y la distancia entre ellos es nula. Pero estos puntos representan diversos objetos materiales (líneas de universo separadas en el espacio). Si cambia la posición del observador respecto de estas líneas, en ellas se verán otros puntos, que se encuentran en distintas isótropas y que se proyectan en diferentes puntos de la esfera. En el entorno más próximo al observador se produce ya un

sensible cambio de punto de vista cuando los objetos se miran primero con el ojo derecho y después con el izquierdo, y la superposición de las impresiones visuales de ambos ojos crea el efecto estereoscópico. El observador puede también torcer su línea de universo. Esto le permite conseguir cambios más importantes de posición respecto de los objetos que lo rodean, así como pasar de una línea de universo a otra. De esta forma llegamos a comprender que el universo visible tiene extensión a lo largo del rayo visual y que esta extensión es ilimitada. Por eso el mundo que nos rodea nos parece una esfera de radio infinito, es decir, un espacio tridimensional.

Como la diferencia de valores de la coordenada w no se aprecia visualmente, el mundo visible nos parece privado de extensión en la dirección del eje OW. La fijación de la coordenada w, es decir, la condición $w = \text{const}$, separa del universo tetradimensional de Minkowski el espacio tridimensional euclídeo propio de un hiperplano constituido por los puntos simultáneos en el sistema de coordenadas $OXYZW$. Los hiperplanos que se diferencian por el valor de la constante en la ecuación $w = \text{const}$, son paralelos entre sí, no coinciden, pero aquellos puntos de estos hiperplanos que son asequibles a la percepción visual por el observador, le parecen a éste pertenecientes a un mismo espacio tridimensional perceptible por los sentidos. Esta impresión se

debe a dos circunstancias. Primera, para las percepciones sensoriales sólo la diferencia de valores de las *tres* coordenadas x, y, z tiene forma y sentido de diferencias espaciales. Segunda, las condiciones geométricas del mecanismo de las percepciones visuales excluyen la superposición de los puntos que tienen valores iguales de las coordenadas x, y, z pero se encuentran en distintos hiperplanos, ya que en cada hiperplano $w = \text{const}$ tomado separadamente sólo es posible observar los puntos de la esfera por la cual se interseca este hiperplano con el hipercono isótropo que tiene el punto de universo del observador como vértice. Todo el resto del universo perceptible visualmente está constituido por puntos de otras esferas, pertenecientes a otros hiperplanos euclídeos propios, que se diferencian por la magnitud del radio. Por ejemplo, si en el instante actual (en el punto de universo O) son asequibles a la percepción del observador los puntos de la esfera (5.28), perteneciente al hiperplano $w = -\rho$, en este mismo instante él no puede ver los puntos de la esfera $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \rho$ *del mismo radio* situada en otro hiperplano, definido por la ecuación $w = -(\rho + \Delta\rho)$. De este modo, cada hiperplano $w = -\rho$ $(0 \leqslant \rho < \infty)$ del universo tetradimensional de Minkowski hace su aportación en forma de capa esférica $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \rho$ a la imagen sintética

del espacio tridimensional que perciben los sentidos.

Mientras el observador permanece ligado a una misma recta de universo *OW* (con un mismo sistema inercial de coordenadas en el espacio perceptible sensorialmente), las relaciones métricas entre los puntos de universo asequibles a su percepción de distintos hiperplanos paralelos se forman, en términos del espacio tridimensional, como si todos los puntos pertenecieran a un hiperplano euclídeo propio perpendicular al eje *OW*. Pero si varía la dirección de la línea de universo del observador (al pasar a otro sistema inercial de coordenadas que se mueva con respecto al inicial), varían también los hiperplanos perpendiculares a ella que hacen aportación al espacio que perciben los sentidos. En esta nueva imagen sintética del espacio, los puntos de las líneas de universo que se observan se encuentran en distintas relaciones métricas entre sí que en el espacio anterior, ligado al primer sistema de coordenadas. Pero al observador le parece que, a causa del cambio de sistema de coordenadas, cambiaron las características métricas de los mismos objetos materiales. Haciendo mediciones suficientemente exactas, descubrirá cómo dependen las longitudes, los intervalos de tiempo y la masa de la elección del sistema inercial de coordenadas. Estas paradojas de la relatividad serían imposibles si el espacio universal fuera objetivamente tridimensional y euclídeo propio. En realidad sólo aparentemente es así, y las propiedades lineales y métricas objetivas del universo, independientes del sistema de coordenadas que se elija, las encontramos en el espacio cuatridimensional seudoeuclídeo.

Bibliografía

1. *Minkowski H.* Raum und Zeit. Phys. Zs., 1909, 10, p. 104.
2. *Kittel C., Knight W., Ruderman M.* Mechanics. Berkeley physics course, v. 1.— N.Y., 1965, p. 313—338. 60.
3. *Угаров В. А.* Специальная теория относительности.— М.: Наука, 1977. с. 315—332, 146. (*Ugárov V. A.* Teoría especial de la relatividad.)
4. *Einstein A.* Zur Elektrodynamik der bewegter Körper. Ann Phys., 1905, 17, p. 891.
5. *Choquet G.* L'Enseignement de la Géometrie.— París, 1964.
6. *Ильин В. А., Позняк Э. Г.* Аналитическая геометрия.— М.: Наука, 1981, с. 46. (*Ilín V.A. y Pozniak E.G.* Geometría analítica.)
7. *Sawyer W.W.* Prelude to mathematics.— Bristol: Penguin Books, 1955, p. 13, 65.
8. *Ильин В. А., Позняк Э. Г.* Линейная алгебра.— М.: Наука, 1984, с. 41, 82. (*Ilín V.A. y Pozniak E.G.* Álgebra lineal.)
9. *Рашевский П. К.* Риманова геометрия и тензорный анализ.— М.: Наука, 1967, с. 86, 296. (*Rashevski P.K.* Geometría y análisis tensorial de Riemann.)
10. *Головина Л. И.* Линейная алгебра и некоторые ее приложения.— М.: Наука, 1985, с. 83. (*Golovina L.I.* Álgebra lineal y algunas de sus aplicaciones.)
11. *Bourbaki N.* Éléments matiques.— Paris, 1974, p. 69—70.
12. *Фихтенгольц Г. М.* Основы математического анализа, т. I.— М.: Наука, 1968, с. 16. (*Fijtengoltz G.M.* Elementos de análisis matemático.)
13. *Шабат Б. В.* Введение в комплексный анализ, ч. I.— М.: Наука, 1985, с. 5. (*Shabat B.V.* Introducción al análisis complejo.)
14. *Курош А. Г.* Курс высшей алгебры.— М.: Гостехиздат, 1952, с. 9. (*Kurosh A.G.* Curso de álgebra superior.)
15. *Wigner E.P.* The Unreasonable Effectiveness of Mathematics in the Natural Sciences. Comm. Pure and Appl. Math., 1960, 13, p. 3, 7.
16. *Храмов Ю. А.* Физики. Библиографический справочник.— М.: Наука, 1983, с. 128, 169, 278, 225. (*Jrámov Y.A.* Físicos. Guía biográfica.)
17. *Einstein A.* Über das Relativitätsprinzip und die aus demselben gezogenen Folgerungen. Jahrb. d. Radioaktivität u. Elektronik, 1907, 4, p. 411.
18. *Einstein A., Infeld L.* The Evolution of Physics.— N.Y.: Simon and Schuster, 1961, p. 189.
19. *L. Landau y E. Lifshitz.* Curso abreviado de Física teórica. Libro 1. Mecánica y electrodinámica. Ed. Mir. Moscú, pág. 130.
20. Таблицы физических величин. Под ред. *И. К. Кикоина.*— М.: Атомиздат, 1976, с. 31. Tablas de magnitudes físicas. Supervisadas por *I.K. Kikóin.*)
21. *Born M.* Atomic Physics.— London, 1959, p. 54, 87, 334.
22. *Einstein A.* Ist die Trägheit eines Körpers von seinem Energieinhalt abhängig? Ann. Phys., 1905, 18, p. 639.
23. *Wichmann E.H.* Quantum Physics. Berkeley Physics course, v. 4. Preliminary Edition.— N.Y., 1967, p. 4—30.
24. *Einstein A.* $E = mc^2$. Ideas and Opinions.— N.Y., London, 1956, p. 340.

Mir edita libros soviéticos traducidos al español, inglés, francés, árabe y otros idiomas extranjeros. Entre ellos figuran las mejores obras de las distintas ramas de la ciencia y la técnica, manuales para los centros de enseñanza superior y escuelas tecnológicas, literatura sobre ciencias naturales y médicas. También se incluyen monografías, libros de divulgación científica y ciencia-ficción.

Dirijan sus opiniones a la Editorial Mir, 1 Rizhski per., 2, 129820, Moscú, I-110, GSP, URSS.

Editorial MIR publica.

Ershov Yu., Paliutin E.

LÓGICA MATEMÁTICA

En el libro se ofrecen, en forma sistemática, varios apartados de la lógica matemática y la teoría de los algoritmos modernos: cálculo de proposiciones, teoría de los conjuntos, autenticidad en los sistemas algebraicos, cálculo de predicados, teoría de los modelos, teoría de las demostraciones, algoritmos y funciones recursivas.

La exposición del cálculo de proposiciones y del cálculo de predicados no es tradicional y comienza por el estudio de las variantes secuenciales de los cálculos de la deducción natural (aunque los cálculos tradicionales también aparecen aquí con el nombre "cálculos de Hilbert"), lo cual se debe a la necesidad de explicar —en la medida de las posibilidades— de forma mas clara el sentido de todas las reglas de deducción, adquirir con mayor rapidez el hábito de demostraciones formales y realizar prácticamente todas las demostraciones matemáticas necesarias para semejantes cálculos.

Casi cada párrafo del texto va seguido de una pequeña cantidad de ejercicios. Se destina a los estudiantes de las especialidades matemáticas de los centros de enseñanza superior.

Lavréntiev M., Shabat B.

MÉTODOS DE LA TEORÍA DE LAS FUNCIONES DE UNA VARIABLE COMPLEJA

Los autores del presente trabajo se plantearon el objetivo de exponer en el mismo los métodos de la teoría de las funciones de una variable compleja no sólo como elementos de una teoría, sino también como una aplicación a los problemas físico-técnicos.

En el primer capítulo el autor da a conocer los conceptos básicos de la teoría de las funciones. Los otros capítulos están dedicados a la exposición de algunos métodos de la teoría de las funciones de una variable compleja, de máxima importancia en la práctica. Un gran número de ejemplos y problemas permite asimilar mejor el material teórico.

El conocimiento de los fundamentos de aplicación de la teoría de las funciones a las diferentes esferas de la física, permitirá a los lectores aprovechar en su trabajo ulterior los métodos expuestos en la literatura dedicada a otras esferas de la física.

Esta obra, sin duda, será útil para estudiantes de centros de enseñanza técnica superior y universidades que se especializan en los diferentes campos de la física y la mecánica.

En la actualidad el conocimiento de la teoría de la relatividad se ha convertido en elemento necesario de la instrucción general, aun cuando la enseñanza y la compresión de esta teoría especial se dificultan a causa de que su descripción matemática contradice las representaciones del espacio y del tiempo, que se basan en las percepciones sensitivas y se consolidan con el estudio de la física clásica. Sin embargo, es muy poco lo que hay que añadir a los conocimientos matemáticos que se dan en la escuela y el primer curso de enseñanza superior, para desarrollar la idea del espacio seudoeuclídeo.

El libro que ofrecemos ayudará a comprender mejor los conceptos de espacio lineal abstracto, de espacios euclídeo y seudoeuclídeo, de número complejo, así como a saber distinguir las propiedades lineales y métricas del espacio, para poder vencer el apego a la acostumbrada evidencia de las imágenes y penetrar en el mundo de las formas ocultas a la percepción visual directa. En el mismo se da la interpretación geométrica de la teoría especial de la relatividad, propuesta por Minkowski.

Del modelo de universo propuesto por este último se pueden obtener como corolarios no sólo los efectos relativistas, sino también los dos postulados de Einstein, además las conclusiones que se hacen de la nueva imagen del mundo concuerdan a la perfección con los hechos establecidos con toda seguridad por vía experimental.

ISBN 5 - 03 - 000783 - 0